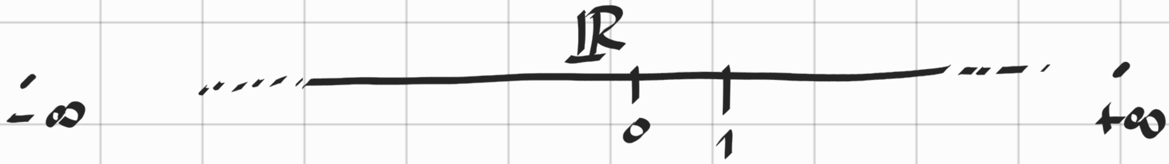
ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 16 – 30.10.2020

Numeri reali estesi



$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ $\qquad -\infty < +\infty$

$\overline{\mathbb{R}}$ è ordinato: $\qquad +\infty > x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\qquad -\infty < x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Se $A \subseteq \mathbb{R}$ non superiormente limitato poniamo:

$$\sup A = +\infty$$

Se $A = \emptyset$ poniamo:

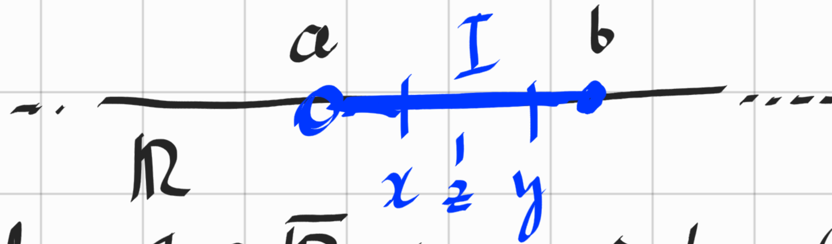
$$\sup \emptyset = -\infty$$

Analogamente se A non è inferiormente limitato

$$\inf A = -\infty$$

se $A = \emptyset$ $\qquad \inf \emptyset = +\infty$.

Intervalli:



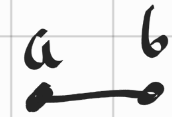
Def Diremo che $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un intervallo se contiene i punti intermedi cioè se

$$\forall\, x,y \in I,\ z \in \overline{\mathbb{R}},\ x<z<y \Rightarrow z \in I.$$

Esempi (notazione)

Dati $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$

$$[a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \le x \le b\}$$



$$[a,b[\,= [a,b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \le x < b\}$$

$$]a,b] = (a,b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \le b\}$$

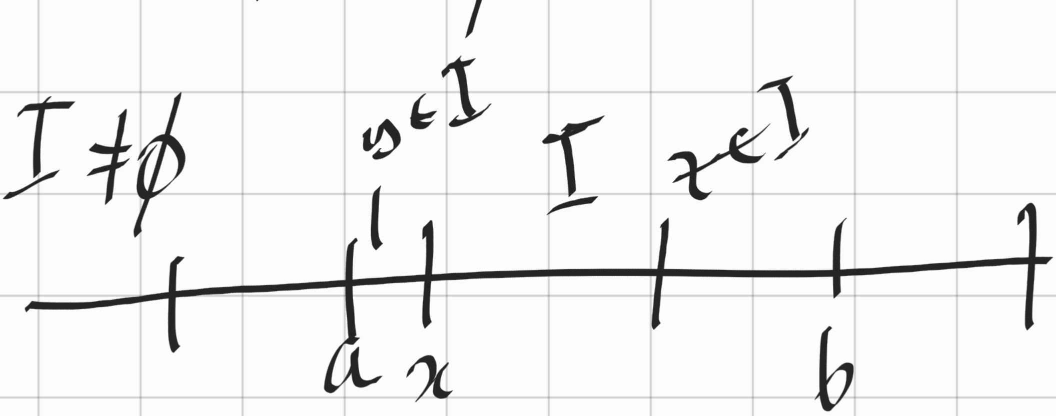
$$]a,b[\,= (a,b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}$$

tutti questi sono intervalli.

Teorema tutti gli intervalli I di $\overline{\mathbb{R}}$ sono del tipo visto sopra con

$a = \inf I \quad , \quad b = \sup I \; .$

<u>dim</u> $I \neq \emptyset$



$$(a,b) \subseteq I \subseteq [a,b]$$

I intervallo

a minorante
b maggiorante

$\square$

<u>Oss</u> su $\mathbb{Q}$ gli intervalli sarebbero più complicati...

$$I = \{ x \in \mathbb{Q} : \quad x^2 \leq 2 \}$$

$$I = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$$

<u>Teorema</u> $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\square$

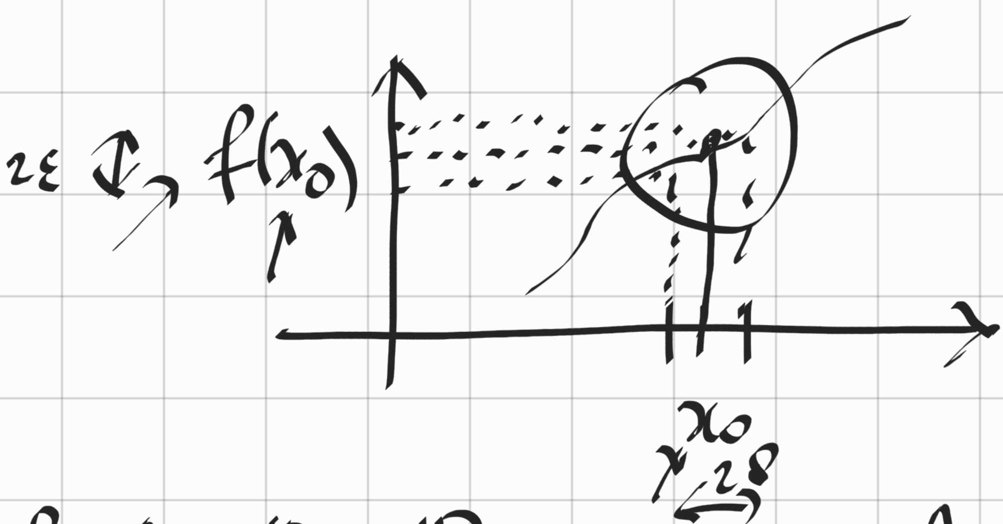
Es

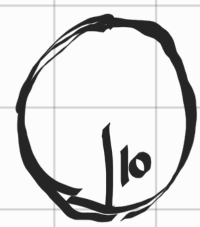
$$[1,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

$$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$$

$$[-\infty,+\infty] = \overline{\mathbb{R}}$$

FUNZIONI CONTINUE

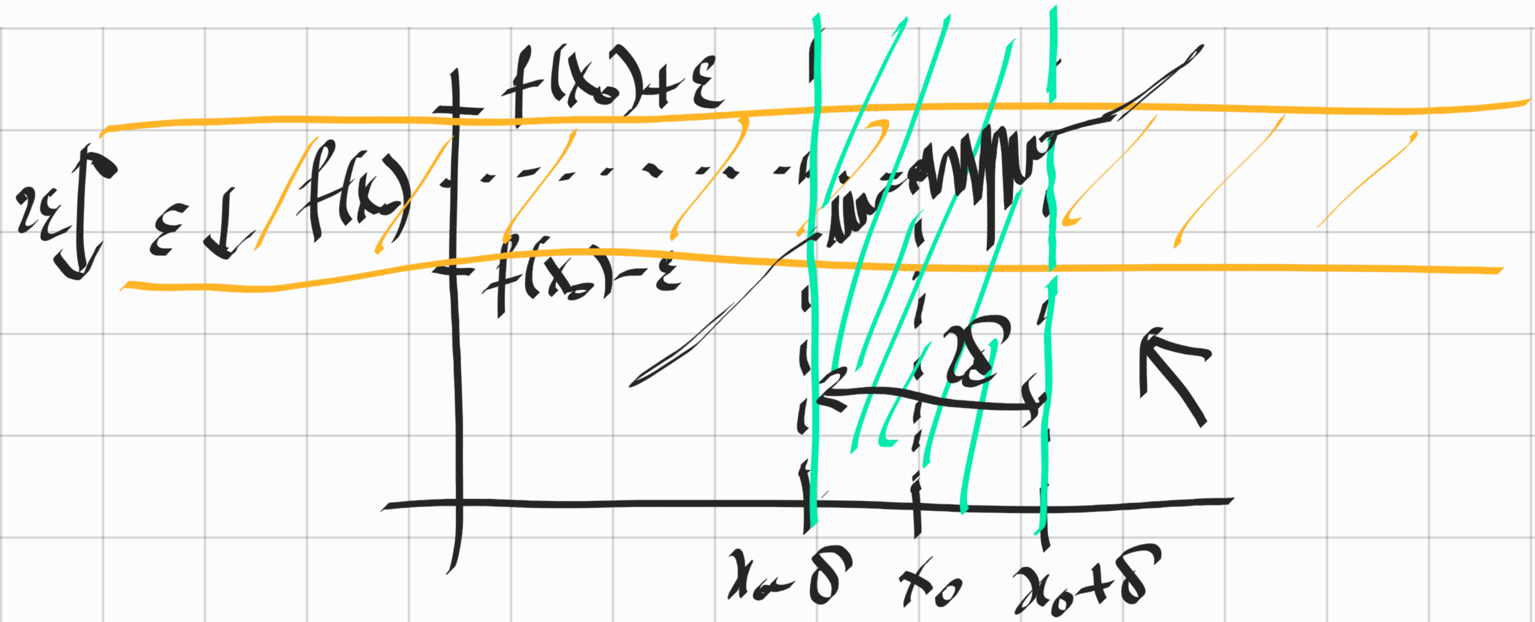




$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad x_0 \in A$

Diremo che f è continua nel punto $x_0 \in A$ se

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$



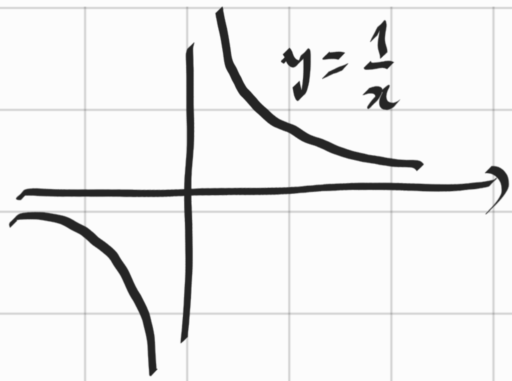
$$x_0-\delta < x < x_0+\delta \Rightarrow f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$$

$$f(x_0) = y_0$$

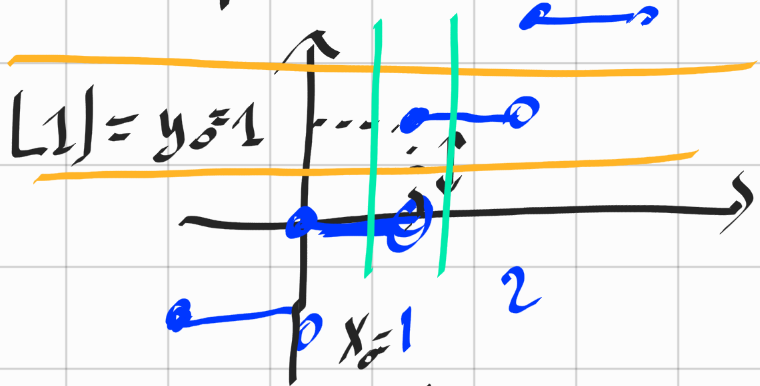
Diremo che $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è <u>continua</u> se è continua in ogni punto $x_0\in A$.

<u>Esempio</u> $f(x)=\frac{1}{x}$ è continua.

$f(x)=|x|$ è continua.



Esempio $f(x) = \lfloor x \rfloor$ non è continua nel punto x_0 se $x_0 \in \mathbb{Z}$



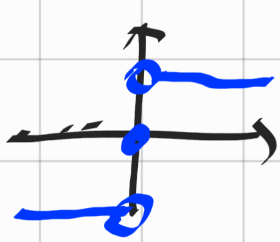
$f(x)$ non è continua nel punto $x_0 = 1$ perché se prendo $\varepsilon < 1$.

Qualunque sia $\delta > 0$ prendo

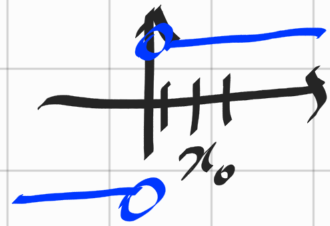
$$x = x_0 - \frac{\delta}{2} = 1 - \frac{\delta}{2} \qquad |x - x_0| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

ma $\underbrace{\lfloor x \rfloor}_{f(x)} = 0 \qquad |f(x) - 1| \geq 1.$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

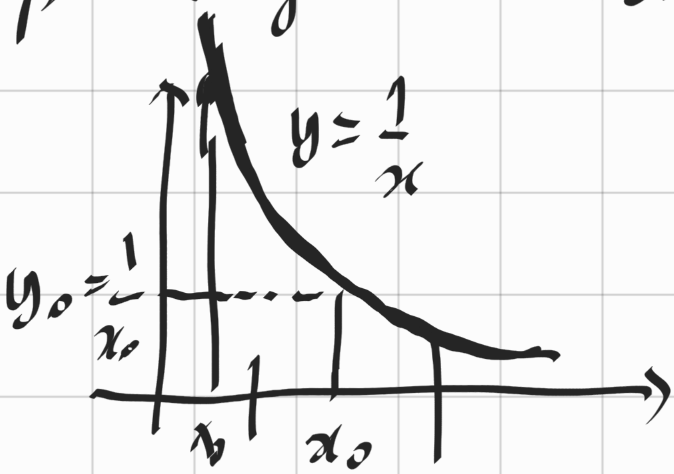


$$f(x) = \frac{x}{|x|} \quad \bar{e} \text{ continua}$$



<u>Teorema</u> $f(x) = \frac{1}{x}$, $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$
è continua.

<u>dim</u> Sia $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ cioè $x_0 \neq 0$
per semplicità $x_0 > 0$.



Devo verificare che se $\varepsilon > 0$ io riesco a trovare $\delta > 0$ tale che:

$$\underbrace{|x - x_0| < \delta}_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon.$$

Cerco di risolvere $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$

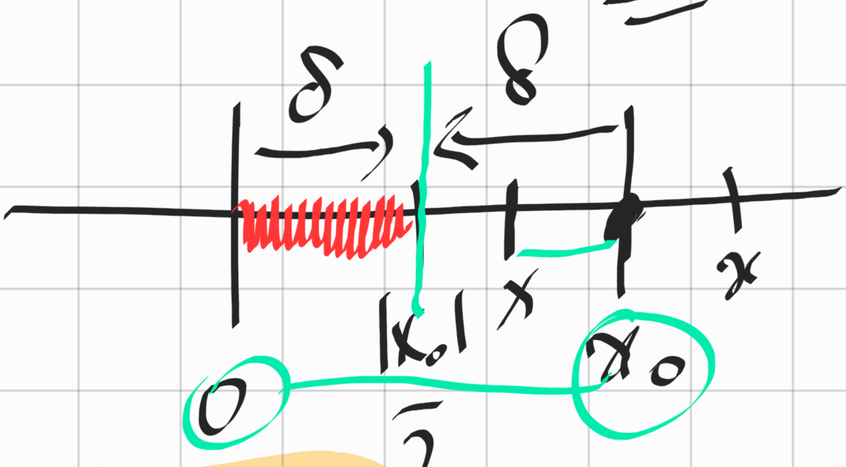
$$\left|\frac{1}{x}-\frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0-x}{x\cdot x_0}\right| = \frac{|x-x_0|}{|x|\cdot|x_0|} \le \frac{2\delta}{|x_0|^2}$$

$$|x|\cdot|x_0| \ge \frac{|x_0|^2}{2}$$

Supponiamo $\delta \le \frac{|x_0|}{2}$

così se $|x-x_0|<\delta$

$$\Rightarrow |x| > |x_0| - \frac{|x_0|}{2} = \frac{|x_0|}{2}$$



$$|x| > \frac{|x_0|}{2}$$

$\Uparrow$

Se $\boxed{\delta \le \frac{|x_0|}{2}}$ se $|x-x_0|<\delta$

allora $|f(x)-f(x_0)| \le \frac{2\delta}{|x_0|^2} \overset{?}{<} \varepsilon$

Basta prendere $\boxed{\delta < \varepsilon\cdot\frac{|x_0|^2}{2}}$. $\square$

esempio: $\delta = \min\left\{ \frac{\varepsilon |x_0|^2}{3}, \frac{|x_0|}{2} \right\}$

$\delta > 0$

$\frac{1}{x}$ è strettamente decrescente se $x > 0$

ES $f(x) = x$, $f(x) = |x|$

sono funzioni continue □

Teorema se f, g sono funzioni continue in un punto x_0.
allora anche $f+g$, $f \cdot g$, $f-g$
$|f|$ e $\frac{f}{g}$ (se $g(x_0) \neq 0$)

sono funzioni continue.

Inoltre se f continua in x_0

e g continua in $f(x_0)$

allora $\boxed{g \circ f}$ è continua

in x_0

Es

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{3}{|x|+2}}{x - \frac{x^3}{2^{-x}}}$$

è continua. (nel suo dominio)

---

dim

$g \circ f$ è continua

in x_0 se f continua

in x_0

e g continua in $f(x_0)$

$$\begin{array}{ccccc} x & & y & & \\ x_0 & \overset{f}{\longmapsto} & y_0 = f(x_0) & \overset{g}{\longmapsto} & z_0 = g(y_0) \end{array}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$$

$\forall y$ $\qquad y = f(x)$ $\qquad$ *

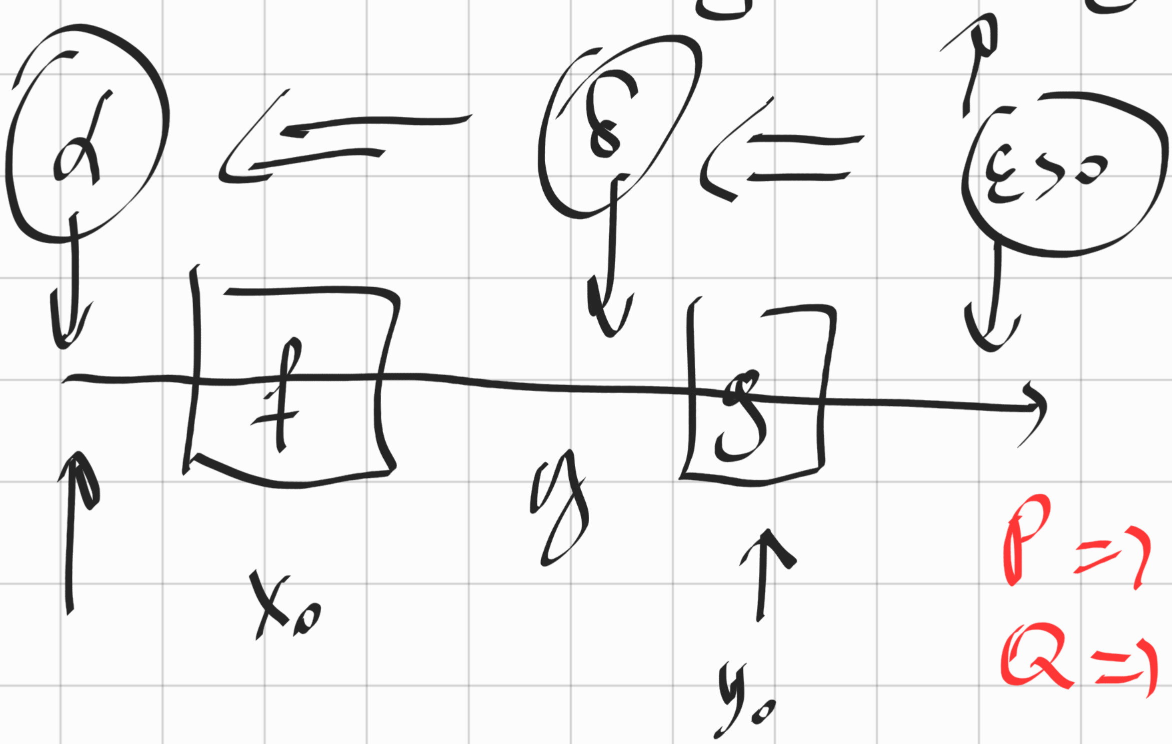
$$\forall \delta > 0 : \exists \alpha > 0 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \delta$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \exists \alpha > 0 : |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{= y_0}| < \delta$$

$$* \Downarrow$$

$$|g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

$\square$



$\square$

$P \Rightarrow Q$
$Q \Rightarrow R$ | $P \Rightarrow R$