ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 10 - 14.10.2020

$$2\cdot\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1), \qquad \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2$$

$$2\sum_{k=m}^{n}(ak+b) = (n-m+1)\cdot\left[am+b+an+b\right]$$

$$\underbrace{m,\ m+1,\ m+2,\ \dots,\ n}_{n-m+1}$$

Esercizio sulla induzione

Dimostrare: $\boxed{2\cdot\sum_{k=1}^{n} k = n(n+1)}$ $P(n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

per induzione su n:

(i) $P(0)$: $2\sum_{k=1}^{0} k = 0 = 0\cdot(0+1)$

(ii) $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

ipotesi induttiva

$$\begin{cases} \text{(i)} & \sum_{k=1}^{0} f(k) = 0 \\ \text{(ii)} & \sum_{k=1}^{n+1} f(k) = \sum_{k=1}^{n} f(k) + f(n+1) \end{cases}$$

(ii) $P(n+1)$: $$2\sum_{k=1}^{n+1} k \overset{?}{\underset{*}{=}} (n+1)\cdot(n+2)$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k + 2(n+1) = n(n+1) + 2(n+1)$$

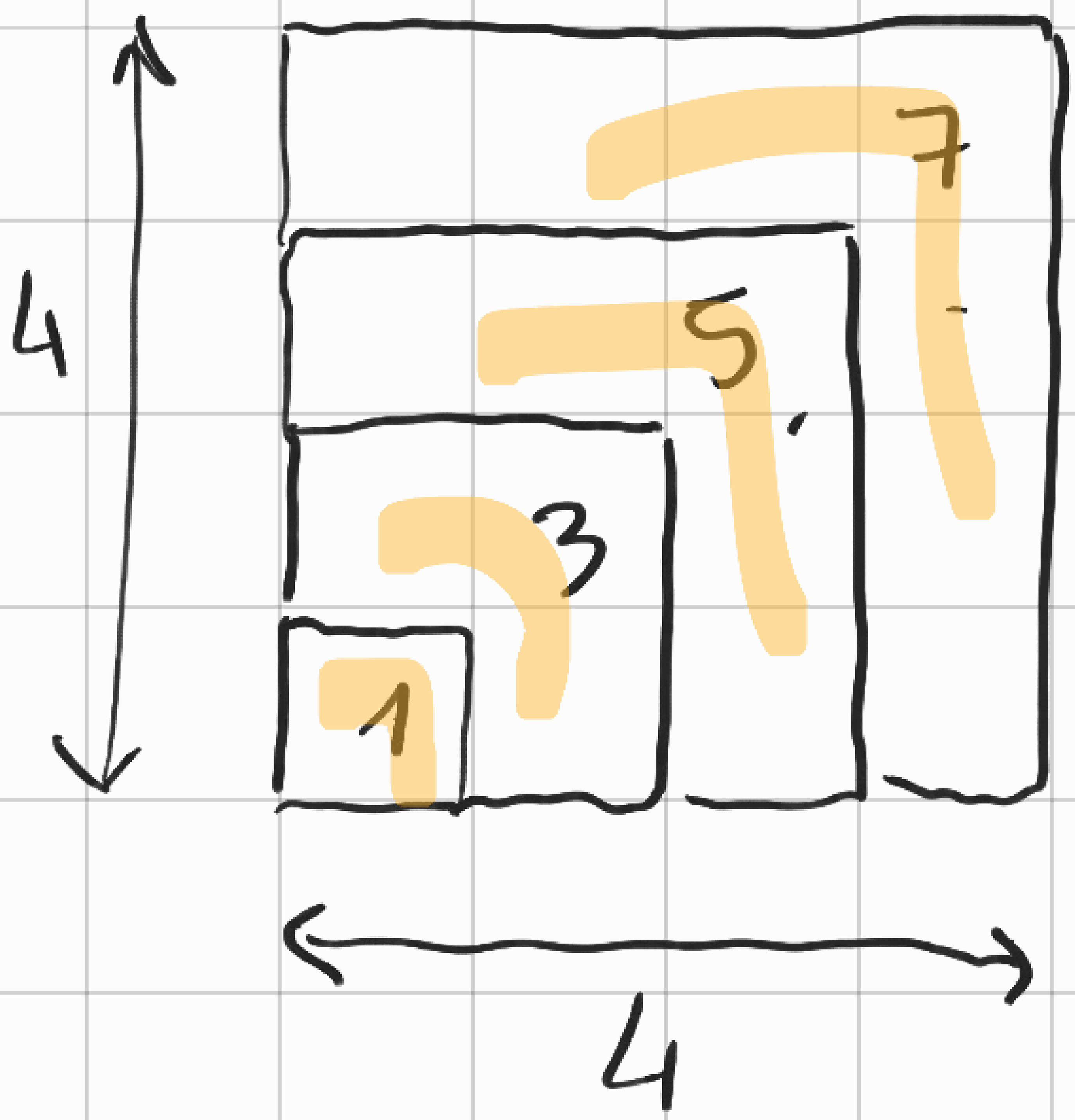
$P(n)$: $$2\cdot\sum_{k=1}^{n} k \underset{*}{=} n(n+1)$$ $\square$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$ ← definizione di sommatoria

Esercizio $$\sum_{k=1}^{n} k^2 = ?$$

Idea: $$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+\ldots+2n-1$$

$$2\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 = n(n+1) - n\cdot 1$$
$$= n^2 + n - n = n^2.$$



$$k^2-(k-1)^2 = k^2-(k^2-2k+1)$$

$$= \cancel{k^2}-\cancel{k^2}+2k-1$$

$$= 2k-1$$

$$k^2-(k-1)^2 = 2k-1$$

SOMMA TELESCOPICA

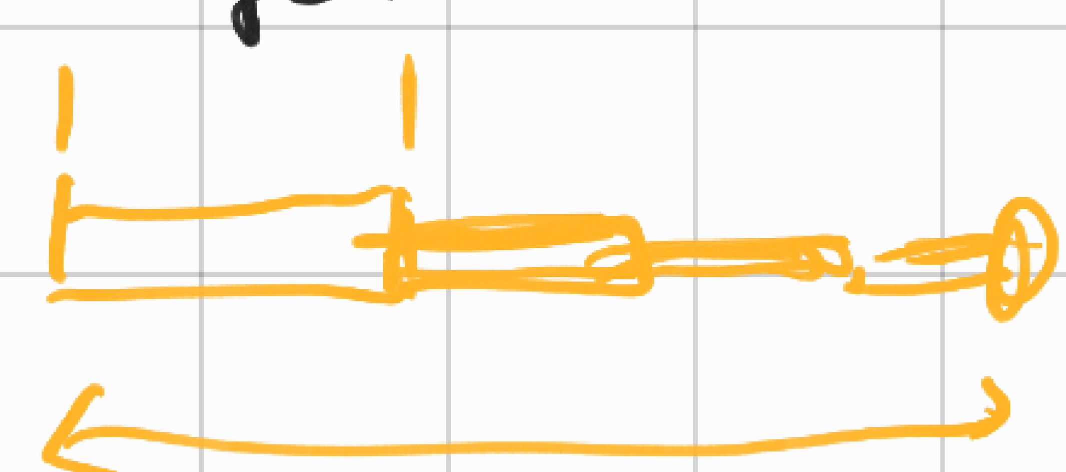
$$\sum_{k=1}^{n} \left(k^2-(k-1)^2\right) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)$$

$$(\cancel{1^2}-\underline{0^2})+(\cancel{2^2}-\cancel{1^2})+(3^2-\cancel{2^2})+\dots+(\underline{n^2}-\cancel{(n-1)^2})$$

$$= n^2-0 = n^2$$

Possiamo usare questa idea per trovare

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$



$$\left(D\,x^3 = 3x^2 \Rightarrow \int 3x^2 = x^3\right)$$

$$k^3-(k-1)^3 = 3k^2-3k+1$$

$$\left((k-1)^3 = k^3-3k^2+3k+1\right)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(k-1)}^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$j = k-1$ – cambio di variabile

$$\|$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{j=0}^{n-1} j^3$$

$$2(n^3 - 0^3) = \boxed{6\sum_{k=1}^{n} k^2} - 3n(n+1) + 2n$$

$$\boxed{6\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2n^3 + 3n(n+1) - 2n}$$

dimostrarla per induzione

* Esercizio $\sum_{k=1}^{n} k^3 = ?$

POLINOMI

Anello Sia A un gruppo commutativo + rispetto alla operazione di addizione $+$. Se su A è definita una seconda operazione $\cdot$ tale che:

[associativa, 0 elemento neutro, esiste opposto — Gruppo]

(distributiva)
$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$$
$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

diremo che A è un anello.

Esempio $\mathbb{Z}$ +

Diremo che A è un anello con unità se esiste $1\in A$ elemento neutro della moltiplic. $(1\neq 0)$ $1\cdot a = a\cdot 1 = a$.

Diremo che A è commutativo se $a\cdot b = b\cdot a$

Diremo che A è un $\boxed{\text{campo}}$ se A è un anello commutativo con unità e se $\forall a\in A,\ a\neq 0\ \exists b\in A : a\cdot b = 1$.
$\left(b=\frac{1}{a}\right)$

($\mathbb{Z}$ è un anello commutativo con 1, ma non i un campo).

Esempi di campo saranno $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

Polinomi.

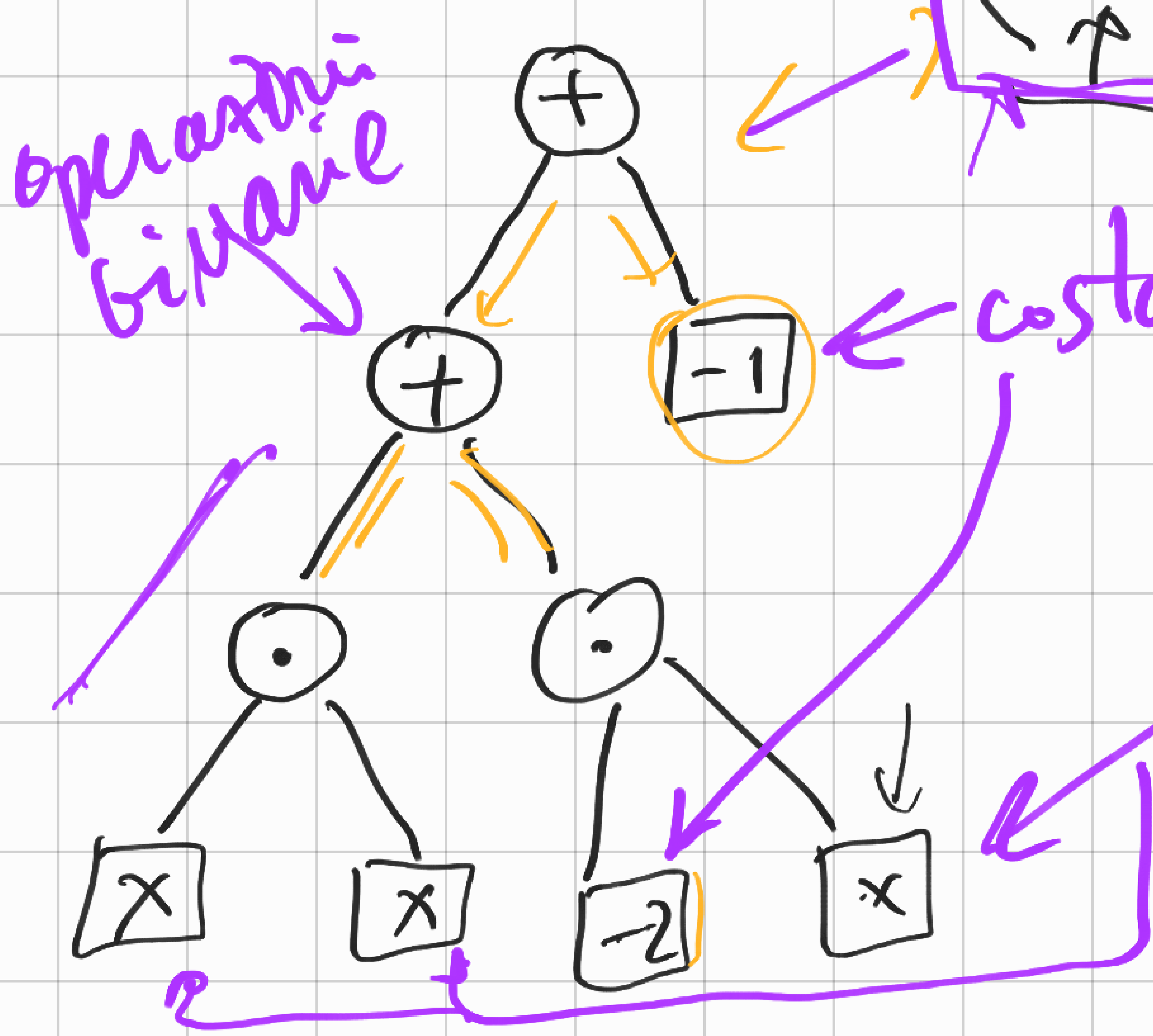
Es x^2-2x-1

- espressione polinomiale
- funzione polinomiale
- polinomio

Espressione polinomiale

Cos'è una espressione:

$$x\cdot x - 2x - 1 = \boxed{\left((x\cdot x)+(-2)\cdot x\right)+(-1)}$$



costanti: $0, 1, \sqrt{2}, \pi \ldots$

$0+0$

variabili

$x, y, z \ldots$

$+$ è binario $a+b$

$\sqrt{\cdot}$ è unario $x!$

$\Gamma(x)$

Una espressione polinomiale coinvolge solo le due operazioni $+$ e $\cdot$ le costanti si chiamano coefficienti e stanno tutte in un qualche anello.

Data una espressione nella variabile x posso mettere al posto di x un numero e valutare l'intera espressione per ottenere un numero.

ES $\quad P: \; x^2-2x-1$ ← coefficienti reali

ovvero $\quad P: \; x \cdot x + (-2) \cdot x + (-1)$

P valutata con $x = 7$

mi dà : $\quad P(7) = 7 \cdot 7 + (-2) \cdot 7 + (-1)$

$$= 49 - 14 - 1$$

$$= 34.$$

$\pi \in \mathbb{R}$

$$P(\pi) = \pi^2 - 2\pi - 1.$$

Una funzione polinomiale

è la funzione che si ottiene valutando una espressione polinomiale:

$$P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^2 - 2x - 1.$$

$(x+1)+2 \qquad x+(1+2)$

$x^2 - 1 \qquad (x+1)(x-1)$

sono diverse come
espressioni polinomiali
ma uguali come funzioni
polinomiali. (cioè
equivalenti)

Polinomio ?

Se Identifico le espressioni polinomiali
che danno luogo alla
stessa funzione polinomiale
in qualunque anello io le
valuti, ottengo la
definizione di Polinomio.

Polinomi = Espr. Pol. / $\sim$

determinare il dominio: $\sqrt{x+1}$

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2$$

$$\frac{x^2}{x} = x \qquad (x \neq 0)$$

Esempio $\quad \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$

$$0+0=0 \qquad 0\cdot 0 = 0$$
$$0+1=1 \qquad 1\cdot 0 = 0$$
$$1+1=0 \qquad 1\cdot 1 = 1$$

è un campo.

$$\# \mathbb{Z}_2^{\mathbb{Z}_2} = 4$$

0 = PARI
1 = DISPARI

$$\underbrace{x^2 + x} = 0 .$$

come funzione in $\mathbb{Z}_2$