ANALISI MATEMATICA

LEZIONE 4 - 30.9.2020

$x \in A$

↑ predicato della teoria degli insiemi

tramite quantificatori e operatori logici possiamo costruire nuovi "predicati" per definire relazioni e operazioni fra insiemi

es: $A \subseteq B$: $\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$

Relazioni: $\subseteq$ $\supseteq$ $=$

Operazioni: $\cap$ $\cup$ $\setminus$

Insieme vuoto: $\emptyset$

Singoletto $\{a\}$. $\{a, b, c\} = \{a\} \cup \{b\} \cup \{c\}$

Assioma di comprensione

Se $P(x)$ è un predicato e B è un insieme allora esiste l'insieme:

$$\boxed{A = \{ \underline{x \in B} : P(x) \}}$$

$$x \in A \iff x \in B \wedge P(x)$$

Paradosso di Russel

Nella teoria "ingenua" degli insiemi [Cantor, Frege] si poteva definire:

sistemata da [Zermelo-Fraenkel]

$$A = \{ x : P(x) \}$$

$$\begin{cases} A \cup B = \{ x : x \in A \vee x \in B \} \\ A^c = \{ x : x \notin A \} \\ \mathcal{U} = \emptyset^c = \{ x : x = x \} \end{cases}$$

↑ Universo

Paradosso

$x \notin A$

$\neg x \in A$

$$R = \{ x : x \notin x \}$$

$R \in R \iff R \notin R$ Assurdo.

Paradosso del Barbiere

Formulazione nel linguaggio naturale

AUTOLOGICO IDEA

ETEROLOGICO = NON AUTOLOGICO

RELAZIONI (e FUNZIONI)

Insieme prodotto, coppia.

Dati a, b chiamiamo (a, b) la coppia con primo elemento a e secondo elemento b.

Non è $\{a, b\}$ in quanto $\{a, b\} = \{b, a\}$

(Possibile definizione: $(a,b) = \{\{a\},\{a,b\}\}$)

Proprietà caratterizzante:

$$(a,b) = (c,d) \iff (a=c \wedge b=d)$$

Quindi $(a,b) = (b,a) \iff a=b$
altrimenti (se $a \neq b$) $(a,b) \neq (b,a)$.

Dati A e B definiamo $A \times B$
come l'insieme di tutte le coppie (a,b)
con $a \in A$, $b \in B$.

$$\boxed{(a,b) \in A \times B \iff a \in A,\ b \in B.}$$

Es $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{5, 6, 7\}$

$$A \times B = \{(1,5),(1,6),(1,7),\\ (2,5),(2,6),(2,7),\\ (3,5),(3,6),(3,7),(4,5),(4,6),(4,7)\}$$

Si nota che se A ha n elementi e B ha m elementi $A \times B$ ha $n \cdot m$ elementi.

$$A \times B \neq B \times A$$

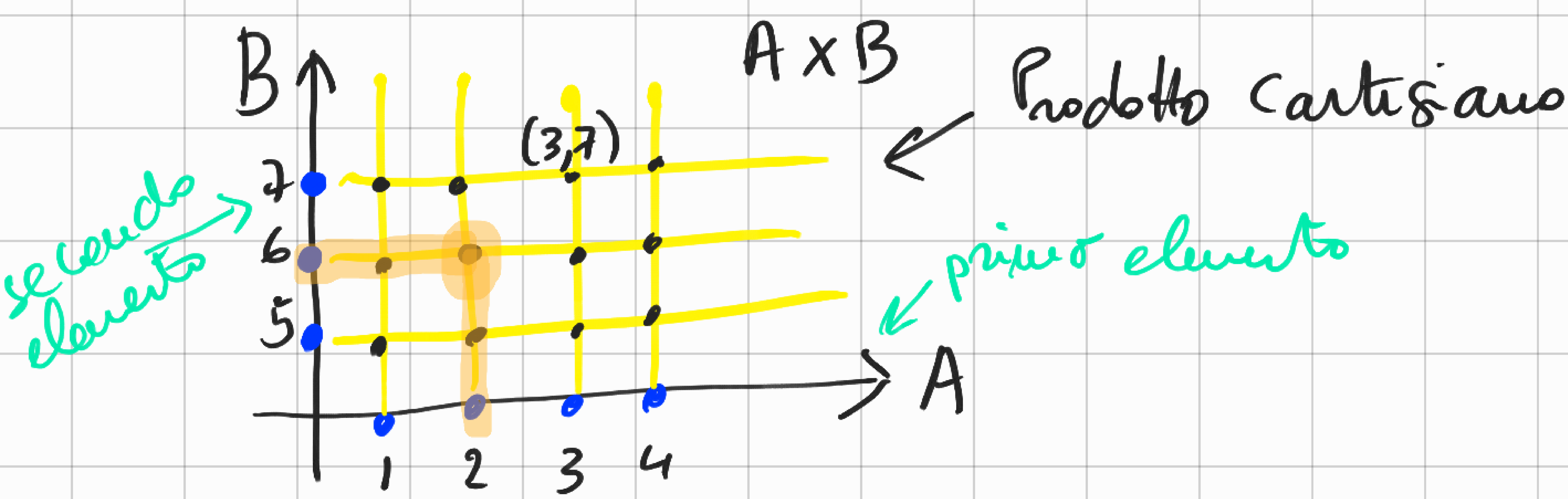
$$\left(A \times B \times C \overset{?}{=} \{ (a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C \} \right)$$

NO $\updownarrow$

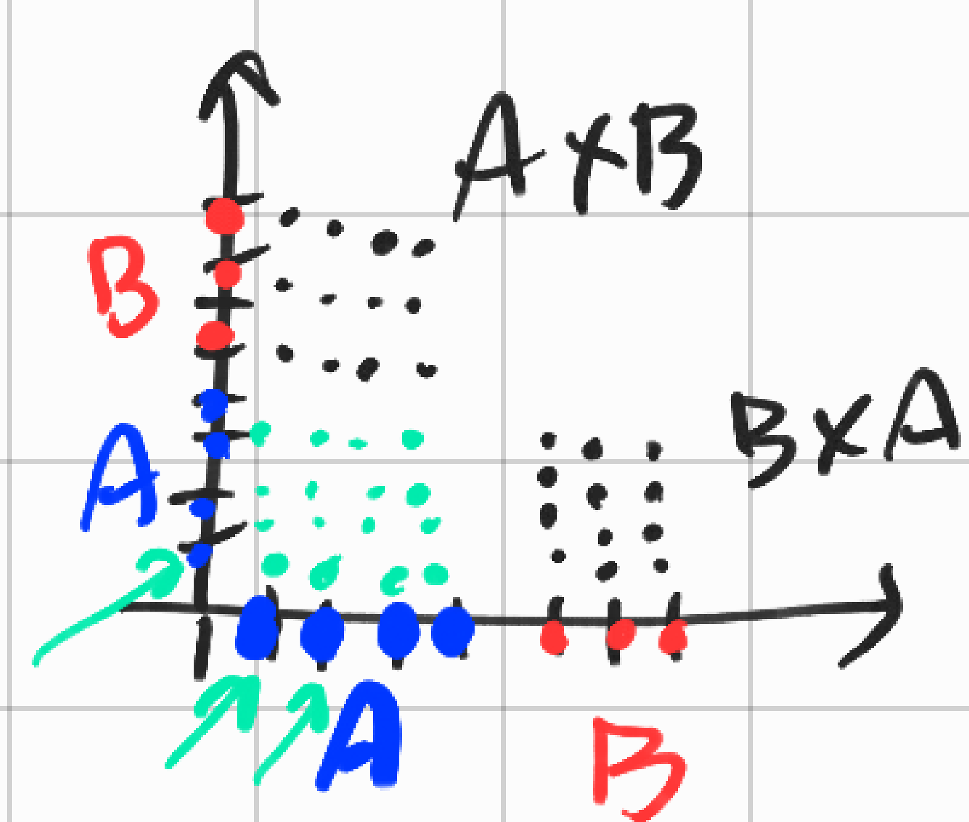
$$(A \times B) \times C = \{ \underbrace{((a,b),c)} : a \in A, b \in B, c \in C \}$$

$$A \times (B \times C) = \{ (a,(b,c)) : a \in A, b \in B, c \in C \}$$

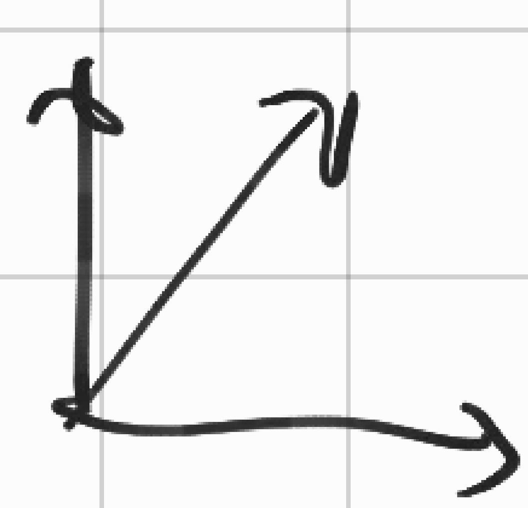
Rappresentazione grafica del prodotto



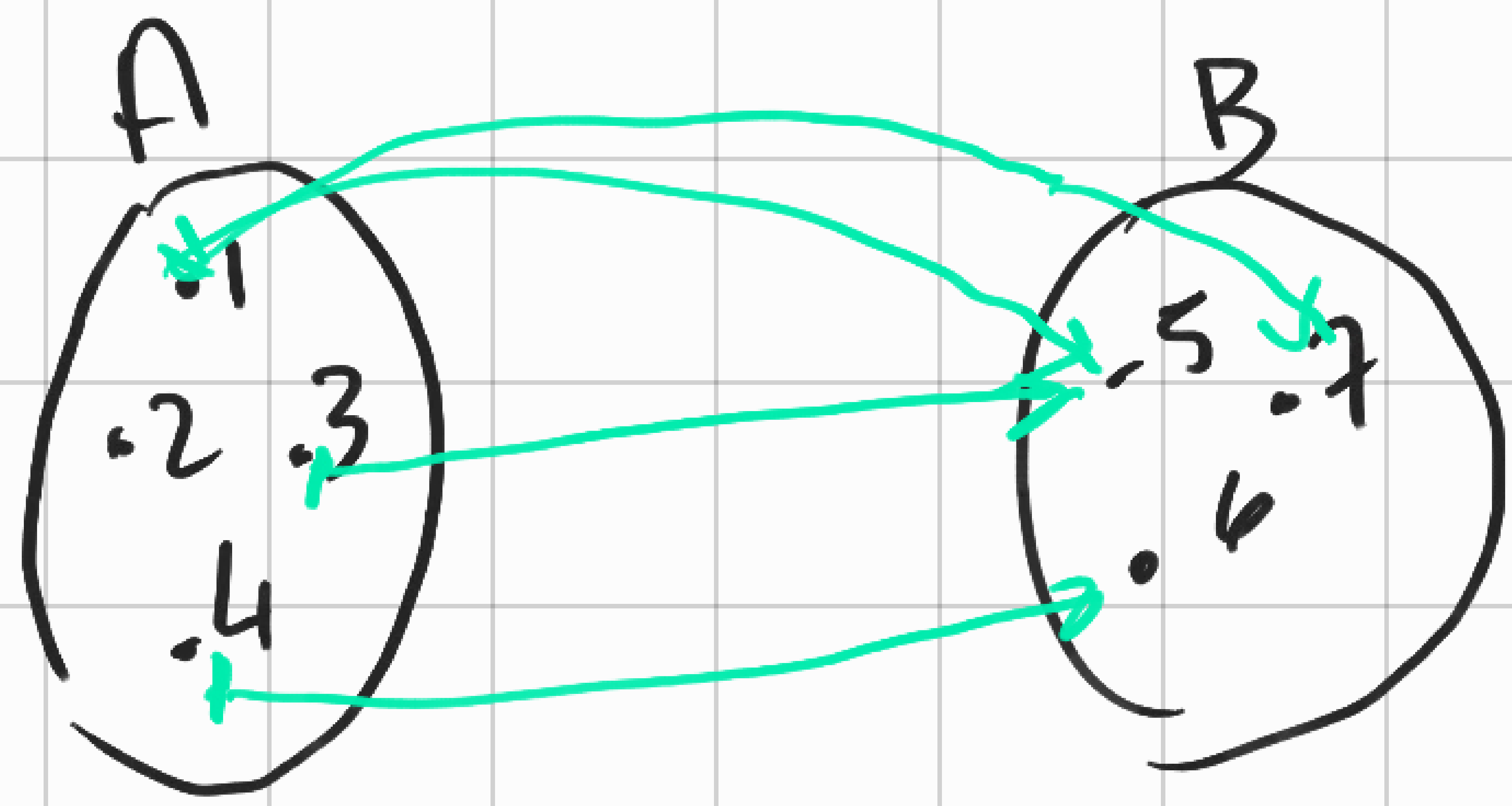
$A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{5, 6, 7\}$

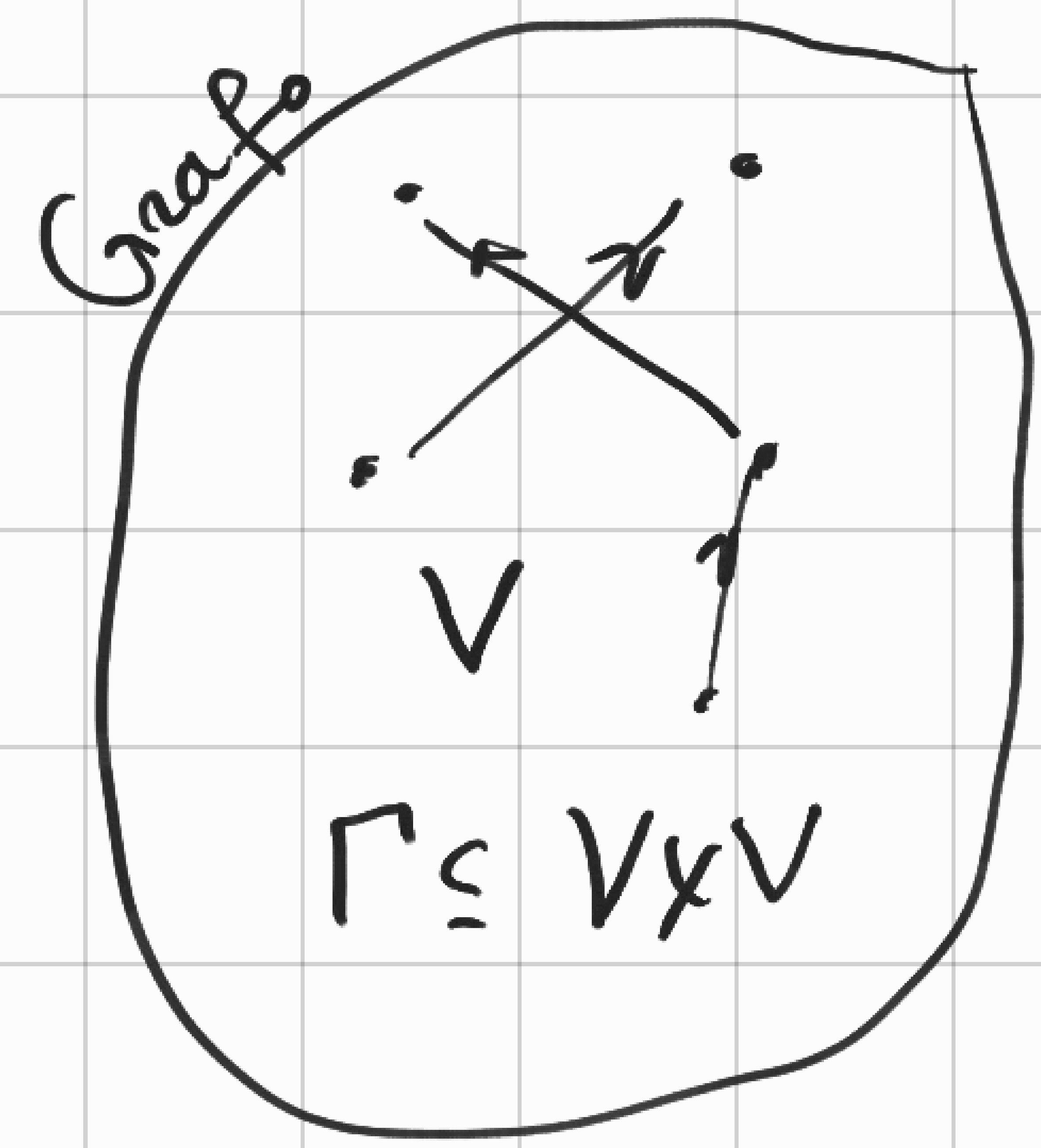


A x A



Modo alternativo di denotare una coppia:
invece di usare la notazione (a,b)
posso scrivere $a \mapsto b$



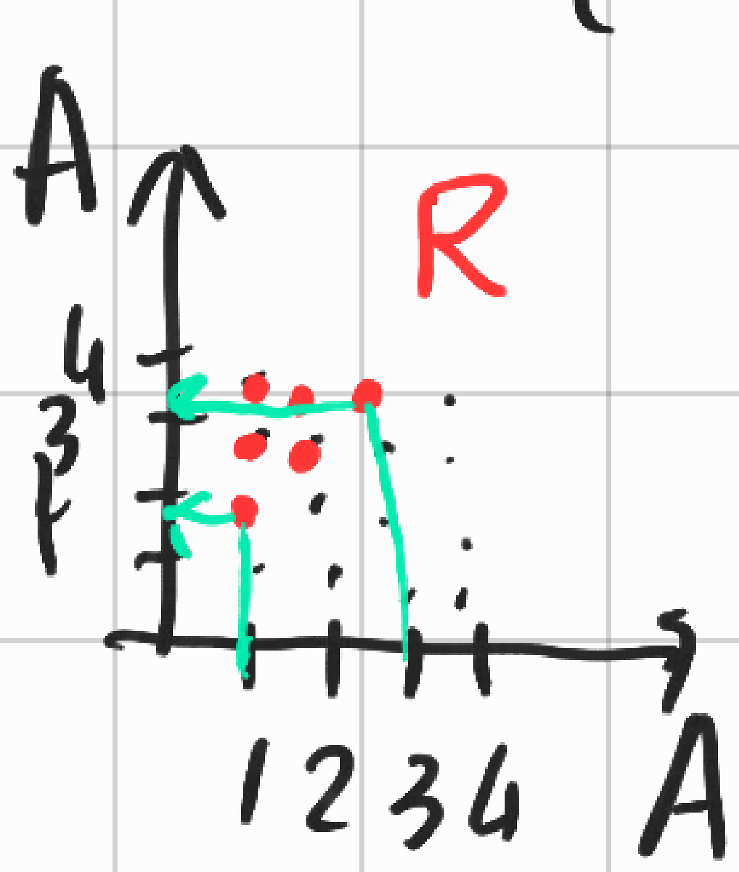


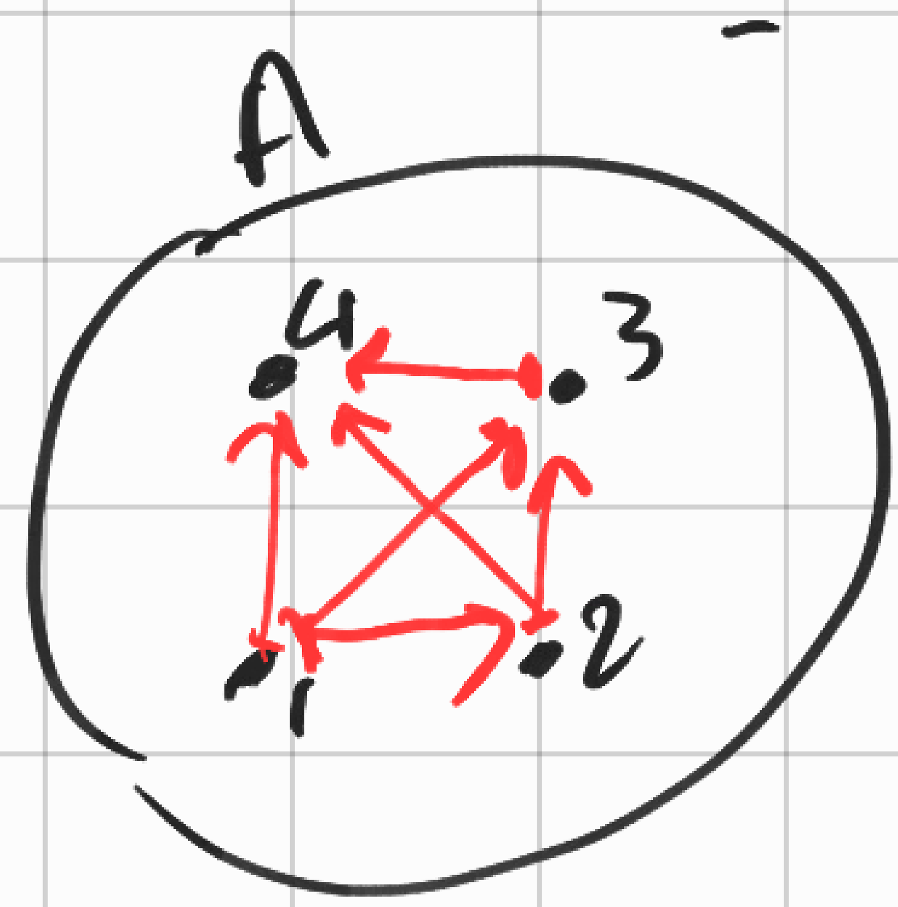
Una **RELAZIONE** R di dominio A e codominio B è un sottoinsieme di $A \times B$.

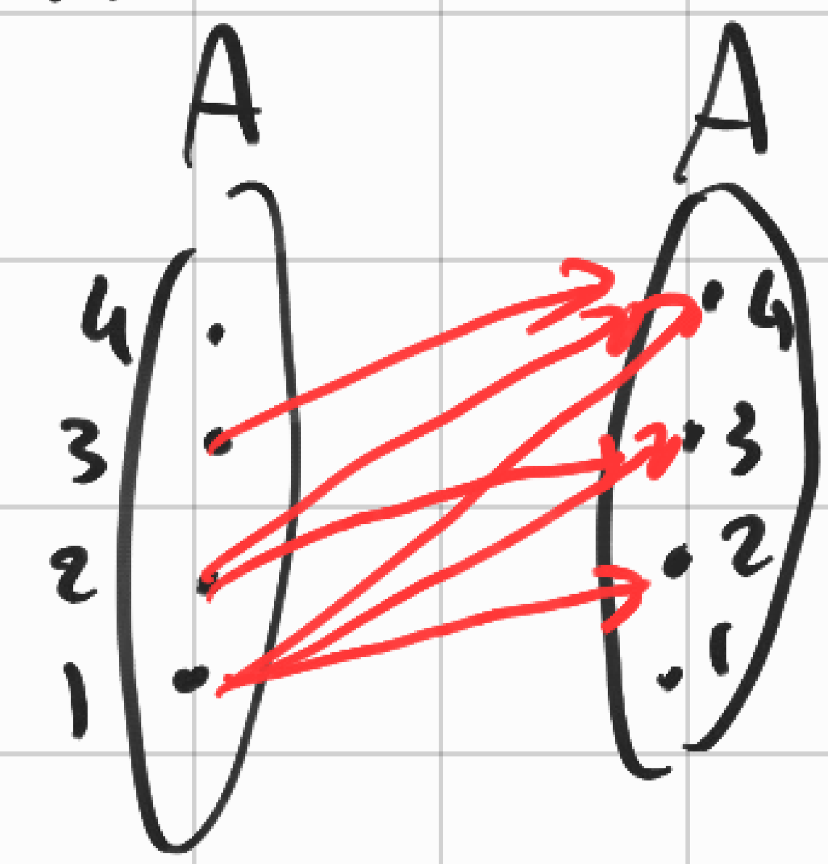
$$R \subseteq A \times B.$$

<u>Es</u> $A = \{1,2,3,4\}$. Voglio rappresentare la relazione d'ordine su A: "$<$"

$$R = \, < \, = \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\} \subseteq A \times A$$







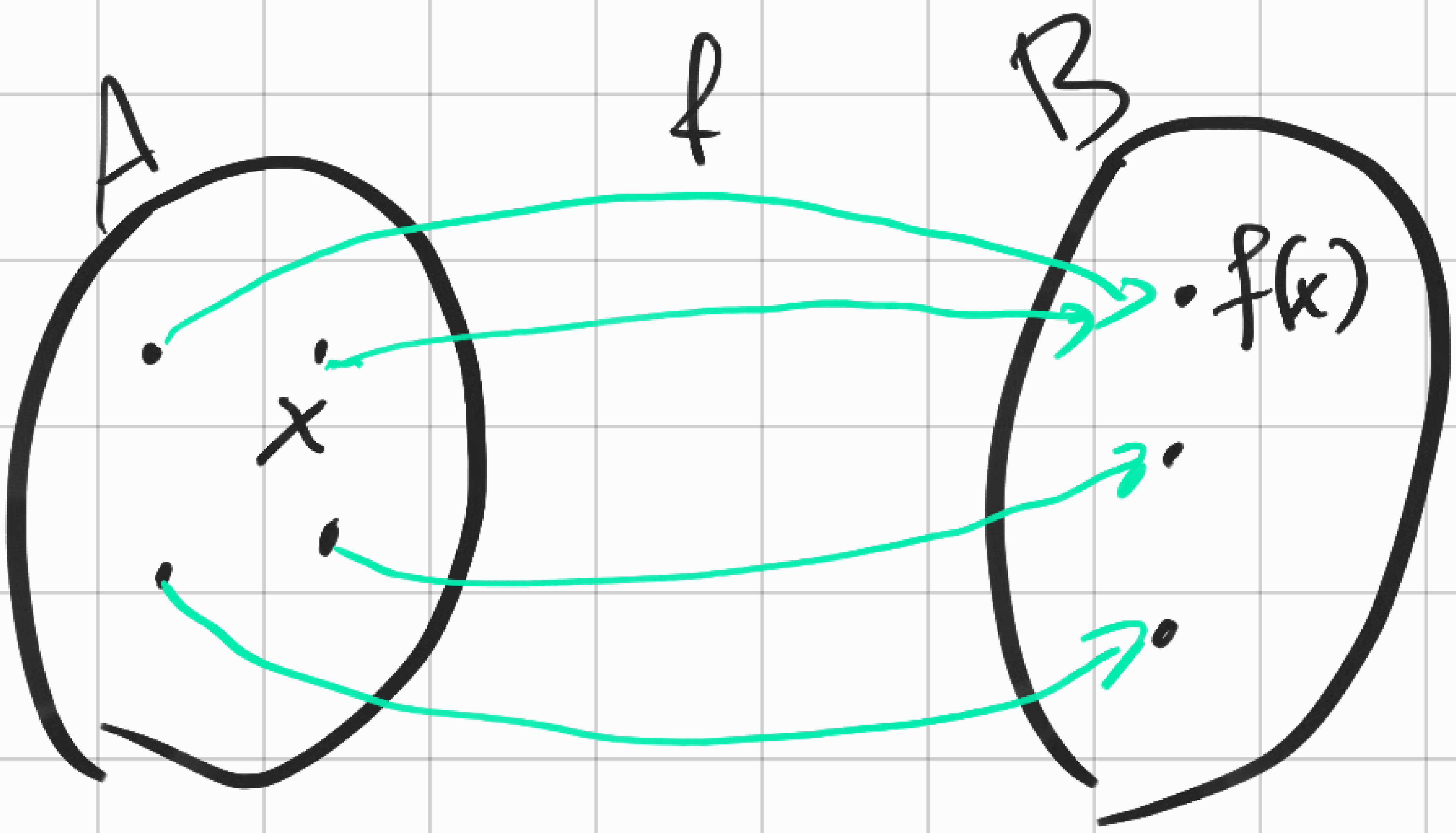
Notazione invece di scrivere $\boxed{(a,b) \in R}$ ⚠

scriverò $\boxed{aRb}$ ⚠

Per esempio $1 < 4$ ⚠ se $R = <$

FUNZIONI

Le funzioni con dominio A e codominio B sono relazioni definite su tutto A e univoche



definita

Da ogni elemento di A esce una e una sola freccia.

univoca.

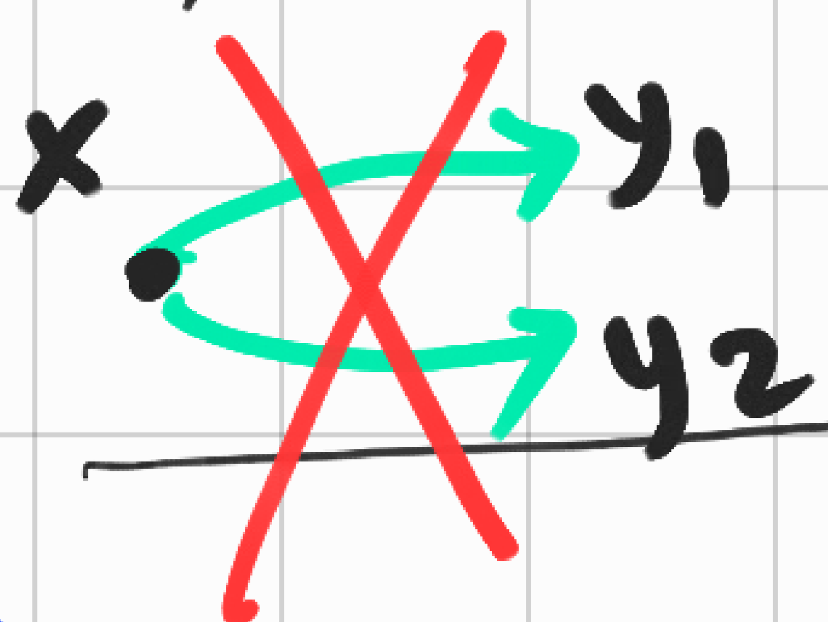
è in relazione con

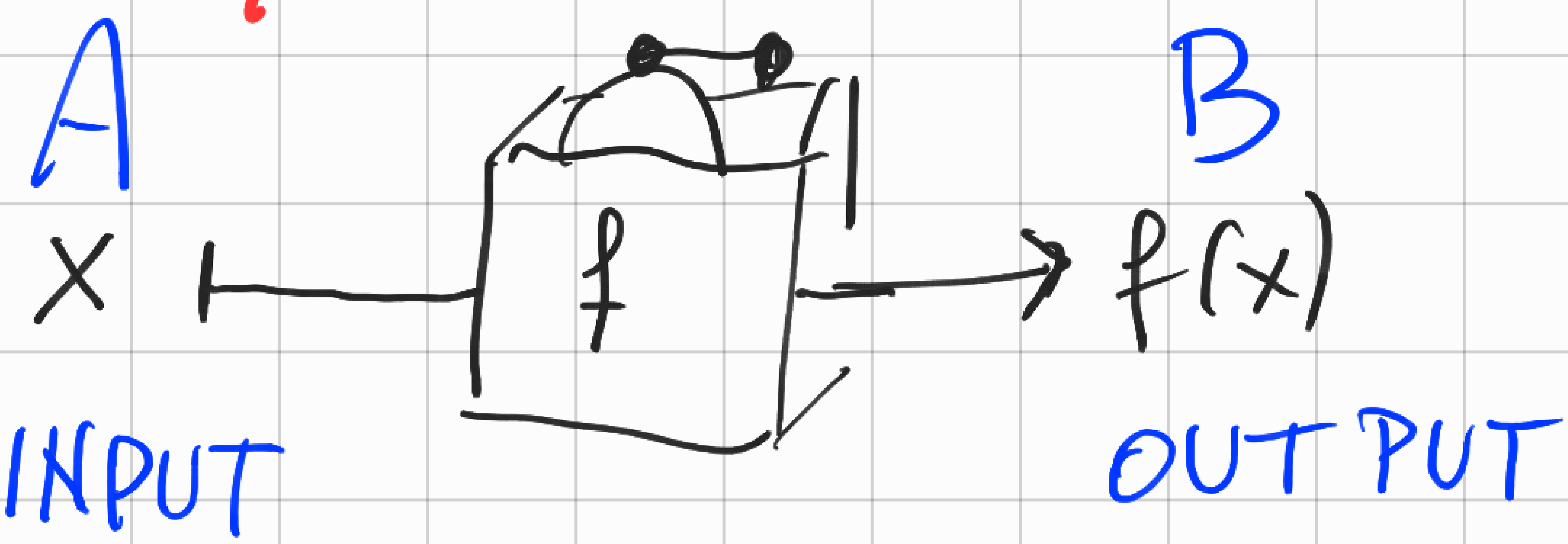
(Ad ogni elemento x di A è associato uno unico elemento di B che chiameremo $f(x)$).

Formalmente una relazione R è una funzione se

(definita) $\forall x \in A \ \exists y \in B$ t.c. xRy

(univoca) $\forall x \in A \ \forall y_1, y_2 \in B$ se $xRy_1 \wedge xRy_2$ allora $y_1 = y_2$





Notazione: $f: A \to B$

significa che f è una funzione con dominio A e codominio B

<u>Es</u> $A = \{1,2,3,4\}$ $\quad B = \{5,6,7\}$

$f = \{(1,5),(2,6),(3,5),(4,7)\}$

$$f = \{1 \mapsto 5,\ 2 \mapsto 6,\ 3 \mapsto 5,\ 4 \mapsto 7\}$$