ANALISI MATEMATICA

LEZIONE 2 25.9.2020

SISTEMA FORMALE

- SIMBOLI $x, y, 1, 2, 3, \dots, +, =$
- FORMULE $x23 = 7+$
- FORMULE BEN FORMATE $x = 7$

$\underbrace{2+2}=5$

$\underbrace{2+2}$

$x+y$

$x=y$

- ASSIOMI $x + 0 = x$
- REGOLE DI INFERENZA

$$\begin{array}{l|c} \text{Hyp} & x = y \\ & y = z \\ \hline \text{th} & x = z \end{array}$$

- TEOREMI: ASSIOMI
  e tutto ciò che si può dedurre dagli assiomi o da altri teoremi tramite le regole di inferenza

ESEMPIO (Hofstadter) SISTEMA MIU

(Gödel-Escher-Bach ...)

SIMBOLI: M, I, U

FORMULE: IUMM, MUIU, MMM, ...

FORMULE BEN FORMATE: TUTTE LE FORMULE CHE INIZIANO PER M

ASSIOMI: MI

REGOLE DI INFERENZA:

1. $xI \vdash xIU$ Es. $I \mapsto IU$: $MI \vdash MIU$

2. $Mx \vdash Mxx$ Es $\dfrac{MIU}{MIUIU}$

3. $xIIIy \vdash xUy$

   Es $\cancel{\text{"UIII"} \vdash \text{"UU"}}$ "UU"

4. $xUUy \vdash xy$

   Es $MUU \vdash M$

Es MI (assioma)

teorema MIU (I da MI)

teorema MII (II da MI)

MIIII (II da MII)

MIU (III da MIII)

MUI (III da MIII)

Teorema MUVII

dimostrazione MI (assioma)

MIIII come già visto

MIIIIIIII (II)

MUIIIII (III)

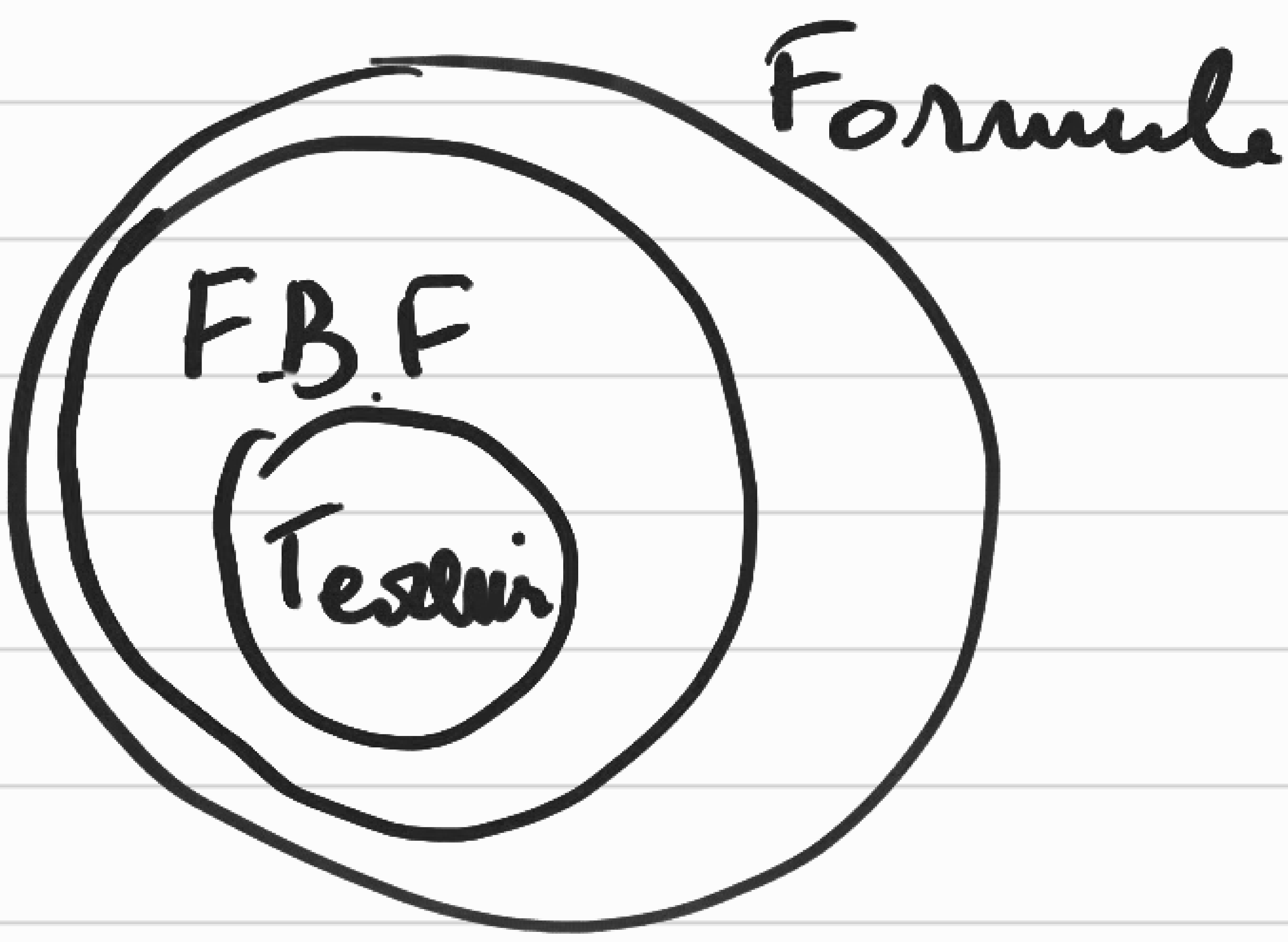
MUUII (III)

□

I teoremi iniziano tutti per M, e poi ci sono solo U e I (*)

Completezza: qualunque formula come (*) è un teorema

Problema: MU è un teorema?



Es

MI

MII

MIIII

$\vdots$

$M\overbrace{I\cdots\cdots I}^{32}$

MUUUUUUUUUUII

MUUII

PROPOSIZIONI (LOGICA)

Una proposizione è una formula a cui viene associato un valore di verità (può essere VERA oppure FALSA)

ES $2+2=5$ (FALSA)

OPERAZIONI LOGICHE

P, Q proposizioni

proposizioni

$P \wedge Q$	congiunzione logica	e
$P \vee Q$	disgiunzione logica	o
$\neg P$	negazione	non
$P \Rightarrow Q$	implicazione	
$P \Leftarrow Q$	implicazione inversa	
$P \Leftrightarrow Q$	equivalenza logica	

Come si definisce il valore di verità?

TABELLE DI VERITÀ

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$ ($Q \Leftarrow P$)	$P \Leftrightarrow Q$
F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	V	F	F	F
V	V	V	V	F	V	V

$P \Rightarrow Q$ "se P allora Q"

Esempio $\boxed{n>7} \Rightarrow \boxed{n>5}$

VERE

$n=9$ $9>7 \Rightarrow 9>5$

$n=6$ $\underset{F}{6>7} \Rightarrow \underset{V}{6>5}$

$n=4$ $\underset{F}{4>7} \Rightarrow \underset{F}{4>5}$

EX FALSO QUODLIBET

$P \Rightarrow Q$ "se P allora Q"

$Q \Leftarrow P$ "Q se P"

$P \Leftrightarrow Q$ "P se e solo se Q"

"P è equivalente a Q"

$\neg P$ "non P"

$P \vee Q$ "P o Q o entrambe"

Es

$$(Q \Rightarrow P) \Leftrightarrow (Q \wedge P) \vee (\neg Q)$$

"Q implica P è equivalente a dire che Q è vera e P è vera oppure che Q è falsa".

Convenzione:

$$\boxed{P \Rightarrow Q \Rightarrow R}$$

si intende $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$

$$\Downarrow$$

$$P \Rightarrow R$$

Ipotesi → tesi

$$P \Rightarrow Q$$

premessa → conclusione

||

Proprietà degli operatori logici

$$\neg(P \wedge Q) \iff (\neg P) \vee (\neg Q)$$

$$\neg(P \vee Q) \iff (\neg P) \wedge (\neg Q)$$

$$\neg\neg P \iff P$$

$$\neg(P \Rightarrow Q) \iff P \wedge \neg Q \quad \leftarrow$$

$$(P \Rightarrow Q) \iff (\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$$

PREDICATI

Formule con oggetti variabili

$$P(x),\ P(x,y) \ldots$$

Esempio $\quad x > 7$

variabile

è una proposizione che dipende da x

QUANTIFICATORI:

$\forall x : P(x)$ "per ogni x P di x"

$\boxed{\begin{array}{l} \forall x \mid P(x) \\ \exists x \mid P(x) \end{array}}$

es: $\forall x : \; x \cdot x \geq 0$

$\underbrace{\forall x : \; \underbrace{x+1 > x}_{\text{predicato}}}_{\text{proposizione}}$

$\exists x : P(x)$ "esiste x tale che P(x)"

es: $\exists x : \; x > 7$