

# Esercizi sullo studio di funzione

April 10, 2025

1. Verificare che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

è derivabile nel punto  $x = 0$ .

2. Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = ||x| - 1|.$$

3. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = 6e^x - ex^3$$

è strettamente convessa.

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$13x^{17} + 1 = 17x^{13}.$$

Dimostrare che ogni soluzione appartiene all'intervallo  $[-2, 2]$ .

5. Disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{\log(x^2)}{6}$$

definita per ogni  $x \neq 0$ .

6. Determinare l'equazione della retta passante per l'origine degli assi cartesiani e tangente alla curva di equazione

$$y = x^4 + 1.$$

7. Dimostrare che vale

$$1 + \log(1 + x^2) \geq \operatorname{arctg} x$$

8. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$5x^7 - 7x^5 + 1 = 0.$$

Quante sono le soluzioni positive?

9. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log x = x^2 - 1.$$

Mostrare inoltre che per  $x > 1$  vale la disuguaglianza

$$\log x < x^2 - 1.$$

10. Trovare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x \operatorname{arctg} x = 1 + \log \sqrt{1 + x^2}.$$

11. Dimostrare che l'equazione

$$x^3 + x^2 - 1 = 0$$

ha una unica soluzione. Dimostrare che la soluzione è compresa tra  $7/10$  e  $8/10$ .

12. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 - 3x + 1 = 0.$$

Dire inoltre quante sono le soluzioni negative.

13. Dimostrare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$4x^4 - 2x + 1 > 0.$$

14. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

15. Dimostrare che per ogni numero reale  $x$  vale

$$4x^4 + 2x + 1 \geq 0$$

16. Trovare tutte le soluzioni complesse dell'equazione

$$(z - 1)^6 + 64 = 0.$$

17. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^8 - 32x^4 + 1 = 0.$$

*Facoltativo:* scrivere inoltre una approssimazione alla prima cifra dopo la virgola della più piccola soluzione positiva.

18. Determinare l'insieme dei valori assunti dalla funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \operatorname{arctg} x.$$

19. Dimostrare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  vale

$$7x^8 - 7x^7 + 1 > 0$$

20. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 2 = 0.$$

21. Risolvere l'equazione

$$3x^5 - x^4 + x = 0$$

22. Trovare le soluzioni complesse dell'equazione

$$z^4 = iz.$$

23. Dimostrare che la funzione

$$f(x) = x^{10} + 2x^2 - x$$

assume il suo valore minimo in un punto  $x_0$  compreso tra  $2/10$  e  $3/10$ .

24. Mostrare che l'equazione

$$x^3 - x^2 + 1 = 0$$

ha una unica soluzione. Dimostrare che la soluzione è compresa tra  $-8/10$  e  $-7/10$ .

25. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x^2 = \log x + 1.$$

26. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$4x^3 - 18x^2 + 24x - 9 = 0.$$

27. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$1 + \log x = \sqrt{x}.$$

28. Determinare i punti di massimo e minimo locale e il valore minimo assoluto assunto dalla funzione

$$f(x) = 2x^6 - 3x^4 - 12x^2.$$

29. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$5x^8 = x^5 + 2$$

30. Per quali valori del parametro  $c$  l'equazione

$$\log x = cx$$

ha due soluzioni distinte?

31. Dimostrare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  vale

$$x^8 - 4x^2 + 4 \geq 0.$$

32. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x} + \log x = 2.$$

33. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$1 + x \log x = 2x.$$

34. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{1+x} + 2 + \arctg x = 0$$

35. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log(1 + x^2) = -x.$$

36. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$\log(1 + x^2) = 1 + x.$$

37. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$1 + 8x^2 \log x = 0.$$

38. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$1 + 8x^2 \log x = 0.$$

39. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$1 + \log x = \sqrt{x}.$$

40. Dimostrare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$(1 + x^2)e^{-x^2} \leq 1.$$

41. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$$

42. Mostrare che per ogni  $x > 0$  si ha

$$e^x \geq x^e.$$

43. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$13 \log(1 + x^2) = 5x.$$

44. Dimostrare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$x^2 + x \geq \operatorname{arctg} x.$$

45. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0$$

46. Dimostrare che per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si ha

$$\operatorname{arctg} x \geq \frac{x+1}{1+x^2} - 2.$$