

Analisi Matematica A e B

Prova scritta n. 4

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

2 settembre 2019

1. Calcolare, se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{4}{(2x - \pi)^2} - \operatorname{tg}^2 x.$$

2. Data la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \ln x + \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$$

- (a) stabilire se la funzione ha massimo, se ha minimo e se è superiormente o inferiormente limitata;
- (b) dire se esiste un prolungamento continuo di f alla semiretta chiusa $[0, +\infty)$ e se tale prolungamento risulta di classe C^1 .
3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ u(0) = a \\ u'(0) = b \end{cases}$$

trovare la soluzione di tale problema (la soluzione può essere scritta mediante un integrale).

Dimostrare che è possibile scegliere $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la soluzione $u(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0.$$

Dire poi se tale soluzione verifica anche la condizione

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u'(x) = 0.$$