Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 4

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

2 settembre 2019

1. Calcolare, se esiste,
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{4}{(2x-\pi)^2} - \operatorname{tg}^2 x.$$

   Soluzione. Operiamo la sostituzione $x = \frac{\pi}{2} - y$ cosicché se $x \to \frac{\pi}{2}$ si ha $y \to 0$. Si ha dunque
$$\begin{aligned}
\frac{4}{(2x-\pi)^2} - \operatorname{tg}^2 x &= \frac{4}{(-2y)^2} - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \\
&= \frac{1}{y^2} - \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\right)^2 \\
&= \frac{1}{y^2} - \left(\frac{\cos y}{\sin y}\right)^2 \\
&= \frac{\sin^2 y - y^2\cos^2 y}{y^2 \sin^2 y}
\end{aligned}$$

   Ricordando allora gli sviluppi delle funzioni trigonometriche per $y \to 0$ si ha, continuando la catena di uguaglianze:
$$\begin{aligned}
\dots &= \frac{\left(y - \frac{y^3}{6} + o(y^3)\right)^2 - y^2\left(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right)^2}{y^2(y+o(y))^2} \\
&= \frac{y^2 - \frac{y^4}{3} + o(y^4) - y^2(1 - y^2 + o(y^2))}{y^2(y^2+o(y^2))} \\
&= \frac{\frac{2}{3}y^4 + o(y^4)}{y^4 + o(y^4)} \to \frac{2}{3} \qquad \text{per } y \to 0.
\end{aligned}$$

   □

2. Data la funzione $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da
$$f(x) = \ln x + \int_x^1 \frac{e^t}{t}\,dt$$

   (a) stabilire se la funzione ha massimo, se ha minimo e se è superiormente o inferiormente limitata;

   (b) dire se esiste un prolungamento continuo di f alla semiretta chiusa $[0, +\infty)$ e se tale prolungamento risulta di classe C^1.

Soluzione. Osserviamo innanzitutto che, poiché

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt,$$

si ha, per ogni $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^1 \frac{e^t - 1}{t} dt\,.$$

e quindi, per il teorema fondamentale del Calcolo

$$f'(x) = \frac{1 - e^x}{x}$$

perciò $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$: in conclusione f è strettamente decrescente e per il teorema di Fermat, essendo definita su un intervallo aperto, non può avere né massimi né minimi. Possiamo anche osservare (ci servirà dopo) che $f'(x) \to -1$ per $x \to 0^+$.

Osserviamo poi che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty,$$

in quanto essendo $\frac{e^t-1}{t} \geq 1$ per $t > 0$ si ha:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^t - 1}{t} dt = +\infty.$$

Dunque la funzione è inferiormente illimitata.

Studiamo ora il comportamento per $x \to 0^+$. Si ha

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\, dt$$

e poiché $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, anche $\lim_{x\to 0} f(x)$ esiste finito. Dunque la funzione (che, ricordiamo, è decrescente) è superiormente limitata.

Poniamo

$$A = \int_0^1 \frac{e^t - 1}{t}\, dt$$

ed estendiamo f ponendo $f(0) = A$. Allora f estesa risulta continua su $[0, +\infty)$. Visto che $f'(x) \to -1$ per $x \to 0^+$ si avrà, grazie al teorema di Lagrange:

$$f'(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = -1$$

e dunque la funzione estesa è derivabile con derivata continua. E' quindi di classe C^1. □

3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u''(x) + u(x) = \frac{1}{1+x^2} \\ u(0) = a \\ u'(0) = b \end{cases}$$

trovare la soluzione di tale problema (la soluzione può essere scritta mediante un integrale).

Dimostrare che è possibile scegliere $a, b \in \mathbb{R}$ in modo che la soluzione $u(x)$ verifichi la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0.$$

Dire poi se tale soluzione verifica anche la condizione

$$\lim_{x \to +\infty} u'(x) = 0.$$

Soluzione. Stiamo considerando l'equazione:

$$u'' + u = \frac{1}{1+x^2}.$$

Le soluzioni dell'equazione omogenea $u'' + u = 0$ si scrivono nella forma

$$u(x) = A \cos x + B \sin x,$$

con A e B costanti.

Utilizziamo il metodo della variazione delle costanti per trovare una soluzione dell'equazione non omogenea. Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x) = A(x) \cos x + B(x) \sin x$$

e poniamo

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x) \frac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x) \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} + \sin x \right) = \frac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} A'(x) & = -\frac{\sin x}{1+x^2}, \\ B'(x) & = \frac{\cos x}{1+x^2}. \end{cases}$$

Infine, considerando anche le condizioni iniziali si ottiene $a = u(0) = A(0)$ e $b = u'(0) = B(0)$ e dunque ponendo

$$\begin{cases} A(x) = a - \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt, \\ B(x) = b + \int_0^x \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt \end{cases}$$

abbiamo che

$$u(x) = A(x) \cos x + B(x) \sin x$$

è la soluzione del problema di Cauchy dato.

Osserviamo ora che

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\sin t}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\, dx$$

esiste finito (grazie al criterio di confronto e convergenza assoluta) e lo stesso vale per

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{\cos t}{1+t^2}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\, dx.$$

Dunque se scegliamo

$$\begin{cases} a = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,dx \\ b = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2}\,dx \end{cases}$$

si avrà che $A(x) \to 0$ e $B(x) \to 0$ per $x \to +\infty$ dunque

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = 0$$

come richiesto (e si potrebbe osservare che questa è l'unica scelta possibile). In tal caso essendo

$$\begin{aligned} u'(x) &= B(x)\cos x - A(x)\sin x + A'(x)\cos x + B'(x)\sin x \\ &= B(x)\cos x - A(x)\sin x + 0 \end{aligned}$$

si avrà anche

$$\lim_{x\to+\infty} u'(x) = \lim_{x\to+\infty} B(x)\cos x - A(x)\sin x = 0.$$

□