

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

16 luglio 2019

1. Al variare di  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{n^5}{n+1}} + \alpha n^2 + \beta n.$$

*Soluzione.* Ricordando che per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

per  $n \rightarrow +\infty$  risulta

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{n^5}{n+1}} &= n^2 \sqrt{\frac{n}{n+1}} = n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = n^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= n^2 - \frac{n}{2} + \frac{3}{8} + o(1) \end{aligned}$$

da cui il limite richiesto risulta uguale a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\alpha + 1)n^2 + \left(\beta - \frac{1}{2}\right)n + \frac{3}{8} + o(1).$$

Chiaramente se  $\alpha > -1$  il limite è  $+\infty$ , se  $\alpha < -1$  il limite è  $-\infty$ . Se  $\alpha = -1$  e  $\beta > \frac{1}{2}$  il limite è  $+\infty$ , se  $\alpha = -1$  e  $\beta < \frac{1}{2}$  il limite è  $-\infty$ . Se  $\alpha = -1$  e  $\beta = \frac{1}{2}$  il limite è  $\frac{3}{8}$ .  $\square$

2. Dire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$  risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \cdot \ln(e^x + x^\alpha)} dx.$$

*Soluzione.* La funzione integranda è continua e quindi localmente integrabile sull'intervallo aperto  $(0, +\infty)$ . Dobbiamo capire l'andamento asintotico per  $x \rightarrow 0^+$  e per  $x \rightarrow +\infty$ . Si ha

$$\ln(e^x + x^\alpha) = \ln\left(e^x \left(1 + \frac{x^\alpha}{e^x}\right)\right) = x + \ln\left(1 + \frac{x^\alpha}{e^x}\right).$$

Per  $x \rightarrow 0^+$  (ricordando che  $\ln(1+y) = y + o(y)$  se  $y \rightarrow 0$ ) si ha

$$\frac{1}{x^\alpha \cdot \ln(e^x + x^\alpha)} = \frac{1}{x^{\alpha+1} + \frac{x^{2\alpha}}{e^x} + o\left(\frac{x^{2\alpha}}{e^x}\right)} \sim \begin{cases} \frac{1}{x^{\alpha+1}} & \text{se } \alpha \geq 1 \\ \frac{1}{x^{2\alpha}} & \text{se } \alpha < 1. \end{cases}$$

Per confronto asintotico l'integrale è quindi convergente in un intorno di  $0^+$  se e solo se  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

Per  $x \rightarrow +\infty$  risulta

$$\ln\left(1 + \frac{x^\alpha}{e^x}\right) \rightarrow 0$$

e quindi

$$\frac{1}{x^\alpha \cdot \ln(e^x + x^\alpha)} = \frac{1}{x^{\alpha+1} + x^\alpha \cdot o(1)} \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}$$

Per confronto asintotico l'integrale risulta essere sempre convergente in un intorno di  $+\infty$  essendo per ipotesi  $\alpha > 0$ .

Concludiamo quindi che l'integrale dato è convergente se  $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ .  $\square$

### 3. Data l'equazione differenziale

$$xu' = u \ln u$$

studiare i relativi problemi di Cauchy

$$u(0) = 2$$

$$u(0) = 1$$

$$u(1) = 2$$

precisando se si ha esistenza e unicità della soluzione, e, qualora esista la soluzione, quale sia l'intervallo massimale di esistenza.

*Dimostrazione.* Necessariamente deve essere  $u(x) > 0$  affinché l'equazione abbia senso. Per  $x = 0$  il lato sinistro si annulla e quindi si deve avere  $u(0) = 1$  affinché anche il lato destro si annulli. Si capisce quindi che la condizione  $u(0) = 2$  è impossibile (non esistono soluzioni) mentre la condizione  $u(0) = 1$  è necessaria.

Nei punti in cui  $u(x) \neq 1$  e  $x \neq 0$  è possibile separare le variabili per ottenere

$$\frac{u'}{u \ln u} = \frac{1}{x}$$

integrando ambo i membri si ottiene quindi, su ogni intervallo in cui  $u(x) \neq 1$  e  $x \neq 0$ :

$$\ln |\ln u| = \ln |x| + c$$

ovvero

$$|\ln u| = e^c \cdot |x|$$

cioè

$$\ln u = \pm e^c \cdot |x|.$$

Posto  $k = \pm e^c$  abbiamo che  $k \neq 0$  e si ha

$$u(x) = e^{k|x|}.$$

Ora osserviamo che la costante  $k$  può essere scelta in maniera indipendente sugli intervalli  $x > 0$  e  $x < 0$ . In effetti qualunque sia  $k$  osserviamo che l'espressione che abbiamo trovato è continua anche per  $x = 0$ . Affinché sia derivabile in  $x = 0$  dobbiamo scegliere la costante  $k$  di segno opposto per  $x > 0$  e per  $x < 0$  cosicché si ottiene

$$u(x) = e^{kx}.$$

Questa funzione soddisfa l'equazione differenziale anche per  $x = 0$  e si ha  $u(0) = 1$  qualunque sia  $k \in \mathbb{R}$ . Abbiamo quindi infinite soluzioni definite per ogni  $x \in \mathbb{R}$  con la condizione  $u(0) = 1$ . Se invece imponiamo la condizione  $u(0) = 2$  deve essere  $k = \ln 2$  e quindi

$$u(x) = e^{x \ln 2} = 2^x$$

è l'unica soluzione, definita su tutto  $\mathbb{R}$ .

Quanto abbiamo trovato è compatibile con il teorema di esistenza e unicità (Cauchy-Lipschitz). Per  $x = 0$ , infatti, l'equazione non può essere messa in forma normale e quindi il teorema non si applica (e infatti non c'è né esistenza né unicità). Per  $x \neq 0$ , invece, c'è esistenza e unicità sugli intervalli  $x \neq 0$  dove l'equazione può essere messa in forma normale.  $\square$