

# Analisi Matematica A e B

## Soluzioni prova scritta n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

26 giugno 2019

1. Dire se la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}}$$

è convergente ed eventualmente calcolarne la somma.

*Soluzione.* Si può osservare che la serie è telescopica, infatti si ha:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}} &= \sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= \sum_{k=1}^N (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \\ &= (-1) \frac{1}{\sqrt{1}} - (-1)^{N+1} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \end{aligned}$$

e per  $N \rightarrow +\infty$  si ottiene che la serie data converge e la sua somma è  $-1$ .

*In alternativa* possiamo dimostrare che la serie converge (senza trovare però il valore della somma) utilizzando il criterio di Leibniz per le serie a segni alterni. Osservando che la serie può essere scritta nella forma  $\sum (-1)^k a_k$  con

$$a_k = \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k^2 + k}} = \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

è evidente che  $a_k \rightarrow 0$  ed è decrescente.

Volendo è anche possibile porre  $a_k = f(k)$  con

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x}}, \quad x \in (0, +\infty)$$

e verificare che  $f'(x) < 0$  per ogni  $x \geq 1$ . □

2. Calcolare, al variare di  $\alpha > 0$ , se esiste,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \int_1^{x^\alpha} e^{\frac{1}{t}} dt}{\ln x}.$$

*Soluzione.* Per  $t \geq 1$  si ha

$$1 + \frac{1}{t} \leq e^{\frac{1}{t}} \leq e$$

dunque, integrando tra 1 e  $x^\alpha$

$$x^\alpha - 1 + \ln x^\alpha \leq \int_1^{x^\alpha} e^{\frac{1}{t}} dt \leq e(x^\alpha - 1)$$

da cui, per  $x > 1$

$$\frac{x - ex^\alpha - e}{\ln x} \leq \frac{x - \int_1^{x^\alpha} e^{\frac{1}{t}} dt}{\ln x} \leq \frac{x - x^\alpha + 1 - \alpha \ln x}{\ln x}.$$

Si osserva allora che se  $\alpha > 1$  il lato destro della disuguaglianza precedente tende a  $-\infty$  e quindi, per confronto, il limite richiesto è  $-\infty$ . Se  $\alpha < 1$  il lato sinistro tende a  $+\infty$  e quindi il limite richiesto è  $+\infty$ .

Rimane da trattare il caso  $\alpha = 1$ . In tal caso possiamo osservare, utilizzando sempre le disuguaglianze precedenti, che il numeratore del limite richiesto tende a  $-\infty$  in quanto

$$x - x^\alpha + 1 - \alpha \ln x = 1 - \ln x \rightarrow -\infty.$$

Possiamo quindi applicare il teorema di de l'Hospital per ottenere che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \int_1^{x^\alpha} e^{\frac{1}{t}} dt}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^y}{y} = -1.$$

*Osservazione.* Il teorema di de l'Hospital si può applicare, nel caso in cui il denominatore di un rapporto tenda a  $+\infty$  anche senza alcuna informazione sul numeratore. Dunque era lecito (spiegandone il motivo) applicare il teorema di de l'Hospital direttamente al limite dato per qualunque  $\alpha$ , senza fare ulteriori verifiche.  $\square$

3. (a) Dire per quali  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ , esiste finito

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^\beta \sqrt{1 - x^{2\alpha}}} dx.$$

(b) Calcolare esplicitamente l'integrale quando  $\beta = 1 - \alpha$ .

*Soluzione.* Si tratta di un integrale improprio la cui convergenza va messa in discussione per  $x \rightarrow 0^+$  e  $x \rightarrow 1^-$ . Per  $x \rightarrow 0^+$  si ha

$$\frac{\arcsin x^\alpha}{x^\beta \sqrt{1 - x^{2\alpha}}} \sim \frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha - \beta}$$

e dunque l'integrale è convergente in un intorno di  $0^+$  se  $\alpha - \beta > -1$ .

Per  $x \rightarrow 1$  la formula di Taylor al primo ordine (ovvero la derivabilità) ci dice che

$$x^{2\alpha} = 1 + 2\alpha(x - 1) + o(x - 1)$$

e dunque

$$\frac{\arcsin x^\alpha}{x^\beta \sqrt{1 - x^{2\alpha}}} \sim \frac{\arcsin 1}{\sqrt{1 - (1 + 2\alpha(x - 1))}} \sim \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2\alpha}\sqrt{1 - x}} \quad \text{per } x \rightarrow 1^-.$$

Significa che l'integrale è convergente, in un intorno di  $1^-$ , per qualunque  $\alpha > 0$  e  $\beta \in \mathbb{R}$ .

Nel complesso, dunque, l'integrale è convergente per ogni  $\alpha > 0$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  con  $\alpha > \beta + 1$ .

*In alternativa.* Per determinare la convergenza dell'integrale in un intorno di  $1^-$  si può effettuare un cambio di variabile. Posto  $1 - x^{2\alpha} = t$  si ha

$$x = (1 - t)^{\frac{1}{2\alpha}}, \quad dx = -\frac{1}{2\alpha}(1 - t)^{\frac{1}{2\alpha} - 1} dt$$

da cui

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^{2\alpha}}} dx = -\int_{1-a^{2\alpha}}^0 \frac{1}{2\alpha\sqrt{t}}(1 - t)^{\frac{1}{2\alpha} - 1} dt$$

che è convergente per ogni  $\alpha > 0$ .

Nel caso  $\beta = 1 - \alpha$  dobbiamo calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1 - x^{2\alpha}}} dx$$

ma osservando che si ha

$$(\arcsin x^\alpha)' = \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\sqrt{1 - x^{2\alpha}}}$$

otteniamo

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x^\alpha}{x^{1-\alpha}\sqrt{1 - x^{2\alpha}}} dx = \left[ \frac{1}{\alpha} \frac{(\arcsin x^\alpha)^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{2\alpha} = \frac{\pi^2}{8\alpha}.$$

□