

Analisi Matematica A e B

Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

3 giugno 2019

1. Calcolare, se esiste

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x + \ln(e^x - x) - \sin \frac{x^3}{6}}{(1 - \cos x) \cdot \operatorname{tg}(x^2)}.$$

2. Dimostrare che l'equazione

$$x^5 = x + 1$$

ha una unica soluzione reale x_0 . Determinare la parte intera di x_0 . Dire quindi per quali $\alpha > x_0$ la successione definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt[5]{1 + a_n} \end{cases}$$

converge a x_0 .

3. Determinare tutte le soluzioni $u(x)$ dell'equazione

$$u' + 2xu = x^3.$$

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la sostituzione $u = v^\alpha$ permette di ricondurre alla precedente l'equazione

$$v' = xv - \frac{x^3}{2}v^3.$$

Risolvere quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = xv - \frac{x^3}{2}v^3 \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.