Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

3 giugno 2019

1. Calcolare, se esiste
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x + \ln(e^x - x) - \sin\frac{x^3}{6}}{(1-\cos x)\cdot \operatorname{tg}(x^2)}.$$

   Soluzione. Sono noti gli sviluppi:
$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\\
\operatorname{tg} x &= x + o(x)\\
\sin x &= x + o(x^2)\\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)
\end{aligned}$$
   da cui si ottiene
$$\begin{aligned}
1-\cos x &= \frac{x^2}{2} + o(x^2)\\
\operatorname{tg}(x^2) &= x^2 + o(x^2)\\
\ln\cos x &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2}{2} + o(x^4)\\
&= -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{8} + o(x^4) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\\
\ln(e^x - x) &= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2}{2} + o(x^4)\\
&= \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\\
\sin\frac{x^3}{6} &= \frac{x^3}{6} + o(x^6).
\end{aligned}$$

Dunque si ha

$$\frac{\ln\cos x + \ln(e^x - x) - \sin\frac{x^3}{6}}{(1-\cos x)\mathrm{tg}\,(x^2)} = \frac{-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)}{\left(\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\cdot(x^2 + o(x^2))}$$
$$= \frac{-\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} \to -\frac{1}{3}.$$

□

2. Dimostrare che l'equazione
$$x^5 = x + 1$$
ha una unica soluzione reale x_0. Determinare la parte intera di x_0. Dire quindi per quali $\alpha > x_0$ la successione definita ricorsivamente da
$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \sqrt[5]{1 + a_n} \end{cases}$$
converge a x_0.

Soluzione. Posto $f(x) = x^5 - x - 1$ si ha $f'(x) = 5x^4 - 1$ da cui si ottiene il seguente andamento:

x		$-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$		$\frac{1}{\sqrt[4]{5}}$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

□

Visto che risulta
$$f\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt[4]{5^5}} + \frac{1}{\sqrt[4]{5}} - 1 < \frac{1}{\sqrt[4]{5}} - 1 < 0$$
la funzione f è negativa su tutto l'intervallo $\left(-\infty, \frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right]$. Sull'intervallo $I = \left[\frac{1}{\sqrt[4]{5}}, +\infty\right)$ la funzione è strettamente crescente e cambia segno in quanto sull'estremo sinistro è negativa e per $x \to +\infty$ il limite è $+\infty$. Per il teorema degli zeri, essendo f continua, esiste x_0 tale che $f(x_0) = 0$ e tale punto è unico per la stretta monotonia.

Visto che $f(1) = -1 < 0$ e $f(2) = 29 > 0$ dunque $1 < x_0 < 2$. Significa che $\lfloor x_0 \rfloor = 1$.

Posto $g(x) = \sqrt[5]{1 + x}$ stiamo poi considerando la successione ricorsiva
$$a_{n+1} = g(a_n).$$

Osserviamo che se $a_n \to \ell$, con $\ell \in R$, allora (essendo g continua) passando al limite in $a_{n+1} = g(a_n)$ si ottiene

$$\ell = \sqrt[5]{1+\ell}$$

ovvero, elevando ambo i membri alla potenza 5:

$$\ell^5 = 1 + \ell$$

che abbiamo dimostrato avere come unica soluzione $\ell = x_0$. Questo significa che se la successione a_n converge, necessariamente converge ad x_0.

Dimostriamo che, se $a_n > x_0$, allora $a_{n+1} < a_n$ e $a_{n+1} > x_0$.

Infatti $a_{n+1} = \sqrt[5]{1+a_n} < a_n$ equivale a $1 + a_n < a_n^5$, cioè $f(a_n) > 0$, vera perché $a_n > x_0$.

D'altra parte $a_{n+1} > x_0$ equivale a $f(a_{n+1}) > 0$, cioè $a_{n+1}^5 - a_{n+1} - 1 > 0$, quindi $a_n + 1 - a_{n+1} - 1 > 0$, vera perché $a_{n+1} < a_n$.

Dunque se $\alpha > x_0$ la successione è decrescente e inferiormente limitata, ha limite finito e, per quanto detto prima, il limite non può che essere x_0.

3. Determinare tutte le soluzioni $u(x)$ dell'equazione

$$u' + 2xu = x^3.$$

Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui la sostituzione $u = v^\alpha$ permette di ricondurre alla precedente l'equazione

$$v' = xv - \frac{x^3}{2}v^3.$$

Risolvere quindi il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} v' = xv - \frac{x^3}{2}v^3 \\ v(1) = 1 \end{cases}$$

determinando l'intervallo massimale di esistenza della soluzione.

Soluzione. La prima è una equazione lineare del primo ordine. Si può risolvere moltiplicando ambo i membri per il fattore e^{x^2}:

$$u'e^{x^2} + 2xue^{x^2} = x^3e^{x^2}$$

cioè

$$(u \cdot e^{x^2})' = x^3e^{x^2}.$$

Integrando ambo i membri si trova dunque

$$u \cdot e^{x^2} = \int x^3 e^{x^2}\, dx.$$

Osservando che $(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$ svolgiamo l'integrale per parti:

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c = \frac{1}{2}(x^2-1)e^{x^2} + c.$$

Abbiamo quindi:

$$u(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) + ce^{-x^2}. \tag{1}$$

Se ora poniamo $u = v^\alpha$ si ha

$$u' = \alpha v^{\alpha-1} v' = \alpha u^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} v'.$$

Supponendo ora che $v(x) \neq 0$ possiamo moltiplicare la seconda equazione differenziale data nell'esercizio per $\alpha v^{\alpha-1}$ ottenendo:

$$\alpha v^{\alpha-1} v' = \alpha x v^\alpha - \alpha \frac{x^3}{2} v^{\alpha+2}$$

cioè

$$u' = \alpha x u - \alpha \frac{x^3}{2} v^{\alpha+2}.$$

Se ora poniamo $\alpha = -2$ otteniamo l'equazione iniziale:

$$u' = -2xu + x^3.$$

Per risolvere il problema di Cauchy osserviamo che se $v(1) = 1$ allora $u(1) = v^{-2}(1) = 1$ dunque possiamo determinare la costante c da (1) ponendo $u(1) = 1$:

$$1 = ce^{-1} \implies c = e$$

e quindi

$$u(x) = \frac{1}{2}(x^2-1) + e^{1-x^2}.$$

Dunque se $u = v^{-2}$ e se $v \neq 0$ si ha $v = 1/\pm\sqrt{u}$ ma scegliamo il segno $+$ in quanto $v(1) = 1$:

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(x^2-1) + e^{1-x^2}}}.$$

Osserviamo ora che l'argomento della radice quadrata si può scrivere nella forma $e^y - \frac{y}{2}$ con $y = 1 - x^2$. E' allora immediato verificare che $f(y) = e^y - \frac{y}{2} > 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$. Basta infatti osservare che, se $y \geq 0$, si ha, per Taylor, $e^y \geq 1+y > \frac{y}{2}$, mentre se $y < 0$ si ha, ovviamente, $e^y > 0 > \frac{y}{2}$. Dunque la funzione v è definita su tutto $\mathbb{R}$ che è l'intervallo massimale di esistenza.

$\square$