

# Analisi Matematica B

## Soluzioni prova scritta parziale n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

18 marzo 2019

1. Dopo aver verificato che la funzione integranda è limitata si calcoli il seguente integrale:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \sqrt{2\pi|x|})}{\cos x} dx.$$

*Soluzione.* La funzione integranda è definita e continua sull'intervallo aperto  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . Per verificare che è anche limitata basterà osservare che i limiti agli estremi del dominio sono finiti: bisognerà quindi calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \sqrt{2\pi|x|})}{\cos x}.$$

Il “numeratore”  $N(x) = \cos(x + \sqrt{2\pi|x|})$  è derivabile con derivata continua per ogni  $x \neq 0$  e si annulla per  $x = \pm \frac{\pi}{2}$ . Dunque si può applicare il teorema di de L'Hospital per ottenere

$$\lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \frac{N(x)}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}} \frac{N'(x)}{-\sin x} = \frac{N'(\pm \frac{\pi}{2})}{\mp 1}.$$

Tale limite è finito dunque la funzione integranda può essere estesa con continuità all'intervallo chiuso  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  dove, per il teorema di Weierstrass, risulta quindi limitata. Di conseguenza l'integrale è certamente convergente.

Per calcolare l'integrale utilizziamo la formula di addizione del coseno e la linearità dell'integrale:

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \sqrt{2\pi|x|})}{\cos x} dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \cos \sqrt{2\pi|x|} - \sin x \sin \sqrt{2\pi|x|}}{\cos x} dx \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \sqrt{2\pi|x|} dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \sin \sqrt{2\pi|x|}}{\cos x} dx. \end{aligned}$$

Osserviamo che il secondo integrale è nullo in quanto la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico. Nel primo integrale, invece, la funzione integranda è pari e dunque possiamo ridurci a calcolare l'integrale sull'intervallo  $[0, \frac{\pi}{2}]$  dove il valore assoluto può essere semplificato. Si ha dunque

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \sqrt{2\pi|x|})}{\cos x} dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \sqrt{2\pi x} dx.$$

Quest'ultimo integrale può essere risolto facendo prima la sostituzione  $y = \sqrt{2\pi x}$  da cui  $dx = \frac{y}{\pi} dy$  e poi integrando per parti:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \sqrt{2\pi x} dx &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} y \cos y dy \\ &= \frac{2}{\pi} \left( [y \sin y]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin y dy \right) \\ &= \frac{2}{\pi} [\cos y]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

□

2. Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} \left( \sin \frac{1}{t} \right) t^\alpha (2 + \cos t) \ln t dt.$$

*Dimostrazione.* Osserviamo che per ogni  $t$  risulta

$$1 \leq 2 + \cos t \leq 3$$

e visto che per  $t \rightarrow +\infty$  si ha

$$t \sin \frac{1}{t} \rightarrow 1$$

esisterà un numero  $M$  tale che per ogni  $t \geq M$  si abbia anche:

$$\frac{1}{2} \leq t \sin \frac{1}{t} \leq 2.$$

Dunque se  $f(t)$  è la funzione integranda, possiamo osservare che per ogni  $t \geq M$  si ha

$$\frac{1}{2} t^{\alpha-1} \ln t \leq f(t) \leq 6 t^{\alpha-1} \ln t.$$

Se  $\alpha \geq 0$  e  $t > 1$  si ha inoltre

$$\frac{t^{\alpha-1} \ln t}{2} \geq \frac{\ln t}{2t}$$

e integrando si ha (se  $x > 1$ )

$$\begin{aligned} \int_x^{x^2} \frac{\ln t}{2t} dt &= \left[ \frac{\ln^2 t}{4} \right]_x^{x^2} = \frac{\ln^2 x^2 - \ln^2 x}{4} = \frac{4 \ln^2 x - \ln^2 x}{4} \\ &= \frac{3}{4} \ln^2 x \rightarrow +\infty \quad \text{per } x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Dunque per  $\alpha \geq 0$  il limite cercato è  $+\infty$ .

Se invece  $\alpha < 0$  sappiamo che  $\frac{\ln t}{t^{-\frac{\alpha}{2}}} \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow \infty$  e quindi se  $t$  è abbastanza grande si ha

$$t^{\alpha-1} \ln t \leq t^{\alpha-1} t^{-\frac{\alpha}{2}} = t^{\frac{\alpha}{2}-1}.$$

Sappiamo però che

$$\int_1^{+\infty} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt$$

è convergente se  $\frac{\alpha}{2} - 1 < -1$  cioè se  $\alpha > 0$ . Di conseguenza

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x^2} t^{\alpha-1} \ln t dt = 0.$$

Ricapitolando, se  $\alpha \geq 0$  il limite richiesto è  $+\infty$ , se  $\alpha < 0$  il limite è  $x0$ .  $\square$

3. Si consideri la funzione  $F(x)$  così definita, per  $x \neq 0$ :

$$F(x) = \int_{x^2}^{3x^2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2} dt.$$

Calcolare il limite di  $F(x)$  per  $x \rightarrow 0$  e verificare quindi che  $F$  può essere estesa con continuità a tutto  $\mathbb{R}$ . Dire se la funzione estesa è di classe  $C^1$ .

*Soluzione.* Integrando per parti e poi riducendo ai fratti semplici si ha

$$\begin{aligned} \int \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2} dt &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \frac{1}{(1+t^2) \cdot t} dt \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \int \frac{1}{t} dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \\ &= -\frac{\operatorname{arctg} t}{t} + \ln \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$\left[ \frac{\operatorname{arctg} t}{t} \right]_{x^2}^{3x^2} \rightarrow 1 - 1 = 0$$

dunque

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} F(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{3x^2}{\sqrt{1+9x^4}} - \ln \frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{3\sqrt{1+x^4}}{\sqrt{1+9x^4}} = \ln 3.\end{aligned}$$

Dunque la funzione  $F$  si può estendere con continuità in  $x = 0$  ponendo  $F(0) = \ln 3$ .

Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha, quando  $x \neq 0$ :

$$F'(x) = \frac{\operatorname{arctg}(3x^2)}{9x^4} \cdot 6x - \frac{\operatorname{arctg}(x^2)}{x^4} \cdot 2x \quad (1)$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0} F'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3x^2 + o(x^3)) \cdot 6x - (9x^2 + o(x^3)) \cdot 2x}{9x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = 0.$$

Dunque, per il teorema di de L'Hospital:

$$F'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} F'(h) = 0$$

la funzione estesa è derivabile anche in  $x = 0$  e la derivata è continua in tale punto. La derivata di  $F$  è chiaramente continua anche in ogni altro punto per (1) e quindi è di classe  $C^1$ .  $\square$

*Soluzione alternativa.* Non è necessario trovare una primitiva della funzione integranda. Infatti essendo  $\operatorname{arctg} x \sim x$  per  $x \rightarrow 0$ , si avrà:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \int_{x^2}^{3x^2} \frac{\operatorname{arctg} t}{t^2} dt &= \lim_{x \rightarrow 0} \int_{x^2}^{3x^2} \frac{1}{t} dt \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} [\ln t]_{x^2}^{3x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{3x^2}{x^2} = \ln 3.\end{aligned}$$

Dopodiché la dimostrazione procede come prima.  $\square$