

Analisi Matematica B

Prova scritta parziale n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

4 febbraio 2019

1. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}.$$

Potrà essere utile disegnare il grafico di f , e calcolare il valore di $f(x)$ per $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.

- (a) Per ogni $y \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = y$.
- (b) Si consideri la funzione $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$g(y) = \max\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : f(x) = y\}.$$

Determinare i punti in cui g è continua e i punti in cui g è derivabile. Calcolare $g'(-1)$.

- (c) Verificare che $g'(5) = \frac{8+5\sqrt{2}}{14}$.

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{2}{x \cdot \arcsin(e^x - e^{-x})} \right).$$

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin x - \sin x - \ln \left(1 + \frac{x^3}{3} \right).$$

- (a) Determinare il polinomio di Taylor di f di ordine 5 centrato in $x_0 = 0$;
- (b) dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che ristretta all'intervallo $(0, \varepsilon]$ la funzione $f(x)$ risulta essere positiva e strettamente crescente.