Analisi Matematica B
Soluzioni prova scritta parziale n. 2

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

4 febbraio 2019

1. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$,
$$f(x) = x + \frac{4}{x^2}.$$
Potrà essere utile disegnare il grafico di f, e calcolare il valore di $f(x)$ per $x \in \{-2, -1, 1, 2\}$.
   (a) Per ogni $y \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = y$.
   (b) Si consideri la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $$g(y) = \max\{x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \colon f(x) = y\}.$$
   Determinare i punti in cui g è continua e i punti in cui g è derivabile. Calcolare $g'(-1)$.
   (c) Verificare che $g'(5) = \frac{8+5\sqrt{2}}{14}$.

Soluzione. La derivata della funzione f è
$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}.$$
Tale derivata si annulla per $x = 2$, è positiva per $x > 2$ e per $x < 0$ ed è negativa per $0 < x < 2$. Dunque c'è un punto di minimo relativo in $(2, f(2)) = (2, 3)$. Dopo aver guardato il comportamento della funzione sulla frontiera del suo dominio (per $x \to \pm\infty$, $x \to 0^{\pm}$) possiamo tracciare un grafico approssimativo, come in Figura.

Nell'intervallo $(-\infty, 0)$ la funzione è strettamente crescente ed assume tutti i valori $(-\infty, +\infty)$. Dunque l'equazione $f(x) = y$ ha sempre una e una sola soluzione in questo intervallo. Nell'intervallo $(0, 2)$ la funzione è strettamente decrescente ed assume tutti i valori $(3, +\infty)$. Dunque se $y > 3$

l'equazione $f(x) = y$ ha una e una sola soluzione in questo intervallo. Analogamente nell'intervallo $(2, +\infty)$ la funzione è strettamente crescente ed assume tutti i valori $(3, +\infty)$ dunque se $y > 3$ l'equazione $f(x) = y$ ha anche una è una sola soluzione in questo intervallo. Per $x = 2$ la funzione assume il valore $f(2) = 3$ e quindi $f(x) = 3$ ha la soluzione $x = 2$ che è l'unica positiva.

Ricapitolando: se $y < 3$ ho una unica soluzione (negativa); se $y = 3$ ho due soluzioni (una negativa e l'altra uguale a 2) e se $y > 3$ ho tre soluzioni (una negativa, una in $(0, 2)$ e una in $(2, +\infty)$).

La funzione $g(y)$ è definita come la più grande delle soluzioni di $f(x) = y$. Se $y < 3$ tale funzione non è altro che la funzione inversa di f ristretta all'intervallo $(-\infty, 0)$. Se $y = 3$ si ha $g(3) = 2$ perché questa è la più grande delle due soluzioni dell'equazione $f(x) = 3$. Se $y > 3$ la soluzione più grande si ha nell'intervallo $(2, +\infty)$ e quindi per $y \in (3, +\infty)$ la funzione g non è altro che l'inversa di f ristretta all'intervallo $(2, +\infty)$. Sugli intervalli $(-\infty, 3)$ e $(3, +\infty)$ la funzione g è quindi continua in quanto è l'inversa di una funzione monotona e continua. La funzione invece non è continua per $y = 3$ in quanto $g(3) = 2$ ma $g(y) < 0$ se $y < 3$ quindi la funzione non può essere continua a sinistra in $y = 3$. Di conseguenza non può essere derivabile in tale punto. In tutti gli altri punti, invece, la funzione g è derivabile in quanto la derivata $f'(x)$ si annulla solo per $x = 2$ che non viene preso in considerazione se $y \neq 3$.

Per calcolare $g'(-1)$ basta osservare che $x = -2$ è l'unica soluzione di $f(x) = -1$ e dunque $g(-1) = -2$. Dunque, per la formula della derivata della funzione inversa si ha

$$g'(-1) = \frac{1}{f'(g(-1))} = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{1 - \frac{8}{(-2)^3}} = \frac{1}{2}.$$

Per calcolare $g'(5)$ possiamo procedere allo stesso modo, dobbiamo però determinare $g(5)$ cioè la più grande soluzione dell'equazione $f(x) = 5$ che possiamo scrivere, moltiplicando tutto per x^2 e potando a primo membro, come una equazione di terzo grado:

$$x^3 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Visto che si può osservare, come suggerito nel testo, che $f(1) = 5$ sappiamo che una soluzione di $f(x) = 5$ è $x = 1$. Dunque il polinomio di terzo grado si annulla per $x = 1$ e possiamo usare il teorema di Ruffini per decomporlo, trovando

$$x^3 - 5x^2 + 4 = (x - 1)(x^2 - 4x - 4).$$

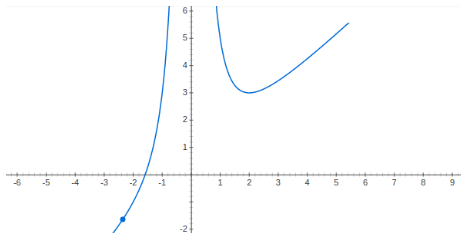

Figura 1: Grafico della funzione del primo esercizio.

Dunque la soluzione più grande si trova risolvendo l'equazione di secondo grado $x^2 - 4x - 4$ in particolare si trova:

$$g(5) = 2 + \sqrt{4+4} = 2 + 2\sqrt{2}.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
f'(g(5)) &= 1 - \frac{8}{(2+2\sqrt{2})^3} \\
&= 1 - \frac{8}{2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot 2\sqrt{2} + 3 \cdot 2 \cdot 4\sqrt{4} + 8\sqrt{8}} \\
&= 1 - \frac{8}{56 + 40\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{7 + 5\sqrt{2}} \\
&= \frac{6 + 5\sqrt{2}}{7 + 5\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}
g'(5) &= \frac{1}{f'(g(5))} = \frac{5\sqrt{2}+7}{5\sqrt{2}+6} = \frac{(5\sqrt{2}+7)(5\sqrt{2}-6)}{25 \cdot 2 - 36} \\
&= \frac{50 - 42 + 35\sqrt{2} - 30\sqrt{2}}{14} = \frac{8 + 5\sqrt{2}}{14}.
\end{aligned}$$

□

2. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\cos x}{\sin^2 x} - \frac{2}{x \cdot \arcsin(e^x - e^{-x})} \right).$$

Soluzione. Facendo il denominatore comune la funzione di cui dobbiamo trovare il limite risulta essere

$$f(x) = \frac{x \cdot \cos x \cdot \arcsin(e^x - e^{-x}) - 2\sin^2(x)}{x \cdot \sin^2 x \cdot \arcsin(e^x - e^{-x})}.$$

Per $x \to 0$ si ha:

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
e^x - e^{-x} &= 2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\
\arcsin t &= t + \frac{t^3}{6} + o(t^3) \\
\arcsin(e^x - e^{-x}) &= 2x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{(2x + o(x))^3}{6} + o((2x + o(x))^3) \\
&= 2x + \frac{x^3}{3} + \frac{8}{6}x^3 + o(x^3) = 2x + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3) \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
\sin^2 x &= \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4).
\end{aligned}$$

Dunque la nostra funzione diventa

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \cdot \left(2x + \frac{5}{3}x^3 + o(x^3)\right) - 2\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)\right)}{x \cdot (x^2 + o(x)) \cdot (2x + o(x))} \\
&= \frac{2x^2 - x^4 + \frac{5}{3}x^4 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^4)} \\
&= \frac{\frac{4}{3}x^4 + o(x^4)}{2x^4 + o(x^5)} \to \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

□

3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin x - \sin x - \ln\left(1 + \frac{x^3}{3}\right).$$

   (a) Determinare il polinomio di Taylor di f di ordine 5 centrato in $x_0 = 0$;

   (b) dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che ristretta all'intervallo $(0, \varepsilon]$ la funzione $f(x)$ risulta essere positiva e strettamente crescente.

Soluzione. Scriviamo i polinomi di Taylor per $x \to 0$:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8 \cdot 5}x^5 + o(x^5)$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$
$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$
$$\ln\left(1 + \frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} + o(x^5).$$

Quindi

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} - x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{5!} - \frac{x^3}{3} + o(x^5) \\ &= x^5\left(\frac{3}{40} - \frac{1}{5}\right) + o(x^5) \\ &= \frac{x^5}{15} + o(x^5) = \frac{x^5}{15} \cdot (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Dunque si può scrivere

$$f(x) = \frac{x^5}{15} \cdot g(x)$$

con $g(x) \to 1$ per $x \to 0$. Per il teorema della permanenza del segno c'è un intervallo $(0, \alpha]$ in cui $g(x) > 0$ e in tale intervallo risulta quindi $f(x) > 0$. Avendo trovato $f(x) = \frac{x^5}{15} + o(x^5)$ possiamo affermare che $\frac{x^5}{15}$ è il polinomio di Taylor di ordine 5 per f. Ma allora il polinomio di Taylor di ordine 4 di f' non è altro che la derivata del polinomio, e quindi

$$f'(x) = \frac{x^4}{3} + o(x^4) = \frac{x^4}{3}(1 + o(1)).$$

Analogamente a prima la funzione $1 + o(1)$ è positiva in un intervallo $(0, \beta]$ e quindi $f'(x) > 0$ in tale intervallo. Dunque f è strettamente crescente in tale intervallo. Prendendo ε il più piccolo tra α ed β si ottiene il risultato richiesto. $\square$