Analisi Matematica A/B
Prova scritta n. 5

Corso di laurea in Fisica, 2018-2019

21 gennaio 2019

1. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta uniformemente continua su $(0, +\infty)$ la funzione
$$f_\alpha(x) = x^\alpha \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \sin\frac{1}{x}$$

   Soluzione. Osserviamo innanzitutto che se fosse $\alpha \leq 0$ si avrebbe che non esiste il limite
$$\lim_{x \to 0^+} f_\alpha(x)$$
e dunque la funzione f_α non potrebbe essere uniformemente continua, in quanto se lo fosse si potrebbe estendere per continuità anche in $x = 0$ (ogni funzione uniformemente continua può essere estesa con continuità alla chiusura del suo dominio). Infatti se il limite per $x \to 0^+$ di $f_\alpha(x)$ non esiste significa che esistono due successioni $x_k \to 0$ e $y_k \to 0$ tali che $f(x_k) \to \ell$, $f(y_k) \to \ell'$ con $\ell \neq \ell'$. Ma se $x_k - y_k \to 0$ e f_α fosse uniformemente continua allora si dovrebbe avere $f(x_k) - f(y_k) \to 0$ mentre noi otteniamo $f(x_k) - f(y_k) \to \ell - \ell' \neq 0$.

   Viceversa se $\alpha > 0$ la funzione f_α può essere estesa per continuità all'intervallo $[0, +\infty)$ e quindi per il teorema di Heine-Cantor la funzione estesa sarebbe uniformemente continua sull'intervallo $[0, 1]$ e di conseguenza la funzione f_α sarebbe uniformemente continua almeno su $(0, 1]$.

   Dobbiamo ora studiare l'uniforme continuità su $[1, +\infty)$.

   Si ha
$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin\frac{1}{x} - x^\alpha \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} \sin\frac{1}{x} \\ &\quad - x^\alpha \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^2} \cos\frac{1}{x} \\ &= x^{\alpha-3} \cdot \Big[\alpha x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sin\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x+1} \sin\frac{1}{x} \\ &\quad - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cos\frac{1}{x}\Big]. \end{aligned} \tag{1}$$

   Si osserva che la parentesi quadra nella precedente espressione tende ad $\alpha - 1 - 1 = \alpha - 2$. Dunque se $\alpha \leq 3$ la derivata è limitata in un intorno di

$+\infty$ e dunque, per il teorema di Weierstrass, è limitata in tutto l'intervallo $[1, +\infty)$. Risulta quindi che per $\alpha \leq 3$ la funzione f_α è lipschitziana e quindi uniformemente continua sull'intervallo $[1, +\infty)$.

Per $0 < \alpha \leq 3$ risulta quindi che f_α è uniformemente continua su tutto il suo dominio $(0, +\infty)$.

Per $\alpha > 3$ si ha invece

$$\lim_{x \to +\infty} f_\alpha(x) = +\infty$$

in quanto la parentesi quadra in (1) tende ad un numero positivo ma $x^{\alpha-3} \to +\infty$.

La funzione f_α non può allora essere uniformemente continua perché dato qualunque $\delta > 0$ si ha, per il teorema di Lagrange,

$$\frac{f_\alpha(n+\delta) - f_\alpha(n)}{\delta} = f'_\alpha(x_n)$$

per un qualche $x_n \in (n, n+\delta)$ e quindi essendo $f'_\alpha(x_n) \to +\infty$ si ha

$$|f_\alpha(n+\delta) - f_\alpha(n)| \to +\infty.$$

Ma se f_α fosse uniformemente continua per ogni $\varepsilon > 0$ esisterebbe un $\delta > 0$ per cui

$$|f_\alpha(n+\delta) - f_\alpha(n)| < \varepsilon.$$

□

2. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \int_n^{n+1} \frac{\sin(\pi x)}{\ln x}\, dx.$$

Dimostrazione. Facendo il cambio di variabili $x = n + t$ e osservando che per $t \in [0, 1]$ si ha $\sin(\pi n + \pi t) = (-1)^n \sin(\pi t)$ otteniamo

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{\sin \pi x}{\ln x}\, dx &= \int_0^1 \frac{\sin(\pi n + \pi t)}{\ln(n+t)}\, dt \\ &= (-1)^n \int_0^1 \frac{\sin \pi t}{\ln(n+t)}\, dt. \end{aligned}$$

La serie data si può scrivere quindi nella forma

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

con

$$a_n = \int_0^1 \frac{\sin \pi x}{\ln(n+x)}\, dx.$$

Chiaramente $a_n \geq 0$ e

$$a_n \leq \int_0^1 \frac{1}{\ln(n)}\,dx = \frac{1}{\ln n} \to 0.$$

Inoltre $a_{n+1} \leq a_n$ in quanto per ogni $x \in [0,1]$ si ha

$$\frac{\sin \pi x}{\ln(n+1+x)} \leq \frac{\sin \pi x}{\ln(n+x)}.$$

Dunque si può applicare il criterio di Leibniz e dedurre che la serie data è convergente.

Potremmo anche osservare (anche se non era richiesto) che la serie non è assolutamente convergente in quanto

$$a_n \geq \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\sin \pi x}{\ln(n+x)}\,dx \geq \int_{\frac{1}{6}}^{\frac{5}{6}} \frac{\frac{1}{2}}{\ln(n+1)}\,dx = \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{\ln(n+1)} = b_n$$

e, chiaramente, $\sum b_n = +\infty$ $\square$

3. Scrivere le soluzioni $u(t)$ dell'equazione differenziale:

$$u'' - 3u' + 2u = \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2}.$$

Dimostrazione. Si tratta di una equazione lineare non omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti. Il polinomio associato è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)(\lambda-2)$. Dunque una soluzione generale dell'omogenea associata si può scrivere nella forma

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Per determinare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea utilizziamo il metodo della variazione delle costanti. Cerchiamo una soluzione della forma

$$u(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)e^{2t}.$$

Si ha

$$u'(t) = c_1(t)e^t + 2c_2(t)e^{2t} + c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{2t}.$$

Se imponiamo

$$c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{2t} = 0$$

si trova poi

$$u''(t) = c_1(t)e^t + 4c_2(t)e^{2t} + c_1'(t)e^t + 2c_2'(t)e^{2t}$$

e imponendo anche

$$c_1'(t)e^t + 2c_2'(t)e^{2t} = \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2}$$

si ottiene che $u(t)$ sia soluzione dell'equazione non omogenea. Dobbiamo quindi trovare $c_1(t)$ e $c_2(t)$ che soddisfano le equazioni

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t + c_2'(t)e^{2t} = 0, \\ c_1'(t)e^t + 2c_2'(t)e^{2t} = \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2}. \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} c_1'(t)e^t = -\frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2}, \\ c_2'(t)e^{2t} = \frac{e^{2t}}{(e^t+1)^2}. \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} c_1(t) = -\int \frac{e^t}{(e^t+1)^2}\,dt, \\ c_2(t) = \int \frac{1}{(e^t+1)^2}\,dt. \end{cases}$$

Gli integrali si possono calcolare con la sostituzione $s = e^t$, $dt = ds/s$

$$c_1(t) = -\int \frac{ds}{(s+1)^2} = \frac{1}{s+1} = \frac{1}{e^t+1}$$

mentre

$$\begin{aligned} c_2(t) &= \int \frac{1}{s(s+1)^2}\,ds = \int \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2}\right] ds \\ &= \ln s - \ln(s+1) + \frac{1}{(s+1)^2} = t - \ln(e^t+1) + \frac{1}{e^t+1}. \end{aligned}$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea risulterà quindi della forma

$$\begin{aligned} u(t) &= c_1 e^t + c_2 e^{2t} + \frac{e^t}{e^t+1} + \left[t - \ln(e^t+1) + \frac{1}{e^t+1}\right] e^{2t} \\ &= (c_1+1)e^t + c_2 e^{2t} + \left[t - \ln(e^t+1)\right] e^{2t} \end{aligned}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

□