Analisi Matematica A e B
Soluzioni prova scritta n. 4

Corso di laurea in Fisica, 2017-2018

3 settembre 2018

1. Scrivere le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'' - 2u' + u = e^x \left(\sin x + \frac{1}{1+x^2} \right).$$

Soluzione. Si tratta di una equazione lineare non omogenea di ordine 2 a coefficienti costanti. Il polinomio associato è $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + \lambda = (\lambda - 1)^2$ che ha $\lambda = 1$ come radice di molteplicità 2. Dunque tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata si scrivono nella forma

$$u_0(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x$$

al variare di c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$ (se siamo interessati alle soluzioni reali).

Per risolvere l'equazione non omogenea è ora sufficiente trovarne una soluzione particolare. Grazie alla linearità possiamo spezzare il termine noto in due addendi e studiare separatamente le due equazioni risultanti.

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione

$$u'' - 2u' + u = e^x \sin x \tag{1}$$

possiamo utilizzare il metodo di somiglianza. Visto che $1 \pm i$ non è radice del polinomio associato sappiamo esistere una soluzione del tipo:

$$u(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x$$

per una scelta opportuna delle costanti c_1 e c_2. Allora si ha

$$\begin{aligned} u'(x) &= c_1 e^x \sin x + c_1 x e^x \cos x + c_2 e^x \cos x - c_2 e^x \sin x \\ &= (c_1 - c_2) e^x \sin x + (c_1 + c_2) e^x \cos x. \end{aligned}$$

Similmente (mettendo $c_1 - c_2$ al posto di c_1 e $c_1 + c_2$ al posto di c_2) si trova

$$u''(x) = -2c_2 e^x \sin x + 2c_1 e^x \cos x.$$

Dunque

$$\begin{aligned} u'' - 2u' + u &= [-2c_2 - 2(c_1 - c_2) + c_1]e^x \sin x \\ &\quad + [2c_1 - 2(c_1 + c_2) + c_2]e^x \cos x \\ &= -c_1 e^x \sin x - c_2 e^x \cos x. \end{aligned}$$

Dunque una soluzione u_1 di (1) si ottiene con $c_1 = -1$ e $c_2 = 0$:

$$u_1(x) = -e^x \sin x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione non omogenea

$$u'' - 2u' + u = \frac{e^x}{1 + x^2} \tag{2}$$

utilizziamo il metodo della variazione delle costanti arbitrarie. Posto

$$u(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$$

imponiamo innanzitutto

$$c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0$$

cosicché si ha

$$\begin{aligned} u' &= c_1 e^x + c_2(x+1)e^x \\ u'' &= c_1 e^x + c_2(x+2)e^x + c_1' e^x + c_2'(x+1)e^x. \end{aligned}$$

Visto che e^x e xe^x sono soluzioni dell'omogenea, si avrà

$$u'' - 2u' + u = c_1' e^x + c_2'(x+1)e^x.$$

Dunque per avere una soluzione dell'equazione (2) basterà risolvere il sistema

$$\begin{cases} c_1' e^x + c_2' x e^x = 0, \\ c_1' e^x + c_2'(x+1)e^x = \frac{e^x}{1+x^2}. \end{cases}$$

Dividendo per e^x e sostituendo la seconda equazione con la differenza delle due equazioni si ottiene

$$\begin{cases} c_2' = \frac{1}{1+x^2} \\ c_1' = -xc_2' = -\frac{x}{1+x^2} \end{cases}$$

per cui una soluzione si ottiene scegliendo $c_2 = \operatorname{arctg} x$ e $c_1 = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Dunque una soluzione u_2 della equazione (2) è data da

$$u_2(x) = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2)e^x + x \operatorname{arctg} x e^x.$$

Per concludere, tutte le soluzioni dell'equazione data si scrivono nella forma

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) = \left[c_1 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]e^x + (c_2 + \operatorname{arctg} x)xe^x$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. □

2. Sia dato l'integrale

$$\int_0^{+\infty} |\ln x|^\beta (\operatorname{arctg} x)^\gamma x^\alpha e^{-x}\, dx.$$

   (a) Dire per quali valori di α, β e γ in $\mathbb{R}$ l'integrale è finito.

   (b) Calcolare esplicitamente l'integrale per $\beta = \gamma = 0$ e α intero positivo.

Soluzione. La funzione integranda

$$f(x) = |\ln x|^\alpha (\operatorname{arctg} x)^\gamma x^\alpha e^{-x}$$

è definita e continua su $(0, 1) \cup (1, +\infty)$. L'integrale va dunque inteso in senso improprio per $x \to 0^+$, per $x \to 1^\pm$ e per $x \to +\infty$.

Per $x \to +\infty$ osserviamo che $\ln x \ll e^{\frac{x}{2}}$, $\operatorname{arctg} x \sim \pi/2$ e quindi

$$0 \le f(x) \ll \frac{\pi}{2} e^{-\frac{x}{2}} \qquad \text{per } x \to +\infty$$

ed essendo $\int_0^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx < +\infty$ la funzione è sommabile in un intorno di $+\infty$ senza alcuna condizione sui parametri α, β e γ.

Per $x \to 1^\pm$ si ha $\ln x \sim x - 1$, $\operatorname{arctg} x \sim \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, $x \sim 1$, $e^{-x} \sim \frac{1}{e}$ da cui

$$f(x) \sim \frac{\pi^\gamma}{4^\gamma \cdot e} |x - 1|^\beta \qquad \text{per } x \to 1^\pm.$$

Dunque l'integrale in un intorno (destro o sinistro) di $x = 1$ ha lo stesso carattere dell'integrale di $|x - 1|^\beta$. Notoriamente tale integrale è finito se e solo se $\beta > -1$.

Per $x \to 0^+$ osserviamo che $\operatorname{arctg} x \sim x$, $e^{-x} \sim 1$ dunque

$$f(x) \sim |\ln x|^\beta x^{\alpha+\gamma} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Se $\alpha + \gamma > -1 + \varepsilon$ per qualche $\varepsilon > 0$, sapendo che $|\ln x|^\beta \ll x^{-\varepsilon}$ otteniamo che

$$f(x) \ll x^{\alpha+\gamma-\varepsilon} \qquad \text{per } x \to 0^+$$

e quindi l'integrale in un intorno destro di 0 è finito essendo $\alpha + \gamma - \varepsilon > -1$. Dunque se $\alpha + \gamma > -1$ e $\beta > -1$ l'integrale dato dall'esercizio è finito.

Se $\beta \leq -1$ sappiamo già che l'integrale non può essere finito (non lo è in un intorno di $x = 1$)

Rimane il caso $\alpha + \gamma \leq -1$ e $\beta > -1$. In tal caso $|\ln x|^\beta \gg \frac{1}{|\ln x|}$ per $x \to 0^+$ dunque

$$f(x) \sim |\ln x|^\beta x^{\alpha+\gamma} \gg \frac{1}{x|\ln x|} \qquad \text{per } x \to 0^+$$

Sappiamo però che se $b < 1$ si ha

$$\int_0^b \frac{1}{x|\ln x|}\,dx = -\int_0^b \frac{1}{x\ln x}\,dx = -[\ln|\ln x|]_0^b = +\infty$$

e quindi l'integrale dato non può essere finito.

Abbiamo quindi mostrato che l'integrale è finito se e solo se $\alpha + \gamma > -1$ e $\beta > -1$.

Nel caso $\beta = \gamma = 0$ e $\alpha > 0$ si può applicare l'integrazione per parti per ottenere:

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} = \left[-x^\alpha e^{-x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{-\infty} \alpha x^{\alpha-1} e^{-x}\,dx = 0 + \alpha \cdot I_{\alpha-1}.$$

Si osserva banalmente che

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1$$

e dunque per $\alpha \in \mathbb{N}$ abbiamo ottenuto

$$\begin{cases} I_0 = 1 \\ I_{\alpha+1} = (\alpha+1) \cdot I_\alpha. \end{cases}$$

Questa non è altro che la definizione di $\alpha!$ dunque $I_\alpha = \alpha!$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}$. $\square$

3. Data la serie
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \int_n^{2n} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^\alpha}\,dx$$
studiarne, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, convergenza assoluta e convergenza semplice.

Soluzione. Posto
$$a_n = \int_n^{2n} \frac{\ln(x)}{(1+x^2)^\alpha}\,dx$$
si osserva che per ogni $n \geq 1$ risulta $a_n > 0$ in quanto la funzione integranda è strettamente positiva sull'intervallo $(n, 2n]$. Dunque siamo di fronte ad una serie a segni alterni.

Per quanto riguarda la convergenza assoluta dobbiamo considerare la serie $\sum a_n$. Osserviamo che da un lato si ha (se $\alpha \geq 0$)

$$a_n \leq \int_n^{2n} \max_{x\in[n,2n]} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha} \leq \frac{n\ln(2n)}{(1+n^2)^\alpha} \leq \frac{\ln(2n)}{n^{2\alpha-1}} \ll \frac{1}{n^{2\alpha-1-\varepsilon}}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e dall'altro

$$a_n \geq \int_n^{2n} \min_{x\in[n,2n]} \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha} = \frac{n\ln n}{(1+(2n)^2)^\alpha} \gg \frac{1}{n^{2\alpha-1}}.$$

Dunque, per confronto, se $2\alpha-1 > 1$ la serie $\sum a_n$ converge, se invece $2\alpha - 1 \leq 1$ la serie $\sum a_n$ diverge. Se $\alpha < 0$ è immediato verificare che la serie non è nemmeno infinitesima. Significa che $\alpha > 1$ è condizione necessaria e sufficiente affinché la serie data converga assolutamente.

Inoltre sempre dalle stime precedenti si osserva che se $2\alpha-1 \leq 0$ cioè se $\alpha \leq \frac{1}{2}$ la successione a_n non è infinitesima e quindi la serie data non può convergere (né assolutamente né semplicemente).

Viceversa se $\alpha > \frac{1}{2}$ la successione a_n è infinitesima. Per poter applicare il teorema di Leibniz e concludere quindi che la serie a segni alterni è convergente, basta dimostrare che la successione a_n è decrescente, almeno per n abbastanza grande.

Per fare ciò osserviamo che $a_n = f(n)$ se poniamo

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\ln t}{(1+t^2)^\alpha}\, dt.$$

Per dimostrare che a_n è decrescente per n grande, è sufficiente quindi mostrare che $f'(x) < 0$ per x grande. Per il teorema fondamentale del calcolo integrale si ha

$$f'(x) = 2\frac{\ln(2x)}{(1+(2x)^2)^\alpha} - \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha} = \frac{\ln x}{(1+x^2)^\alpha}\left[\frac{2\ln(2x)}{\ln x}\frac{(1+x^2)^\alpha}{(1+(2x)^2)^\alpha} - 1\right] \tag{3}$$

ma essendo

$$\frac{2\ln(2x)}{\ln x} = \frac{2\ln 2 + 2\ln x}{\ln x} \to 2 \qquad \text{per } x \to +\infty$$

e

$$\frac{(1+x^2)\alpha}{(1+(2x)^2)^\alpha} = \left(\frac{1+x^2}{1+4x^2}\right)^\alpha \to \frac{1}{4^\alpha}$$

si ottiene che la parentesi quadra in (3) tende a $\frac{2}{4^\alpha} - 1$ che è negativo essendo $4^\alpha > 2$ per $\alpha > \frac{1}{2}$. Dunque dalla (3) si ottiene

$$\frac{(1+x^2)^\alpha}{\ln x} \cdot f'(x) \to \frac{2}{4^\alpha} - 1 < 0 \qquad \text{per } x \to +\infty$$

da cui necessariamente $f'(x) < 0$ per x abbastanza grande.

$\square$