

**Università degli Studi di Firenze**  
**Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica**  
**Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini**  
**APPELLO N. 6 – PROVA SCRITTA (12 Settembre 2016)**

**Importante:** Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{(n+1)^2 n^2}{4}.$$

2. Si consideri la successione  $a_n$  definita ricorsivamente da

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_1 = 2016 \end{cases}$$

con  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ .

- (a) Dimostrare che l'intervallo  $I = (-2, 1/2)$  è invariante per  $f$ ;  
(b) determinare tutte le soluzioni dell'equazione  $f(f(x)) = x$ ;  
(c) calcolare  $\lim a_n$ .

3. Dimostrare che comunque siano dati  $n$  numeri reali distinti

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n$$

l'equazione

$$\frac{1}{x - a_1} + \frac{1}{x - a_2} + \dots + \frac{1}{x - a_n} = 0$$

ha  $n - 1$  soluzioni.

4. Calcolare

$$\int_0^{2\pi} \cos^4(x) dx.$$