

Università degli Studi di Firenze
Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica
Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini
APPELLO N. 5 – PROVA SCRITTA (5 Luglio 2016)

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Utilizzare il principio di induzione per provare che se $a \in \mathbb{N}$ è un numero dispari, allora $a^{2^n} - 1$ è divisibile per 2^{n+2} per ogni $n \geq 1$.
(È utile mostrare preliminarmente che il prodotto di numeri dispari è dispari e che le potenze intere di numeri dispari sono numeri dispari.)

2. Stabilire quale settore circolare di un disco di raggio R consente di costruire l'imbuto di capacità massima. (Si determini, ad esempio, l'angolo al centro.)

3. Sia $f: [0, 1] \rightarrow [0, 3]$ la funzione definita da

$$f(x) = x + x^2 + x^3.$$

- (a) Dimostrare che f è una funzione invertibile;
- (b) calcolare

$$\int_0^3 f^{-1}(t) dt.$$

4. Stabilire per quali valori (reali) dei parametri α e (delle coppie) (β, γ) , rispettivamente, sono convergenti gli integrali

$$\int_0^\infty \frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{\cosh t}} dt, \quad \int_0^{1/2} \frac{\arctan(x^\beta)}{(1 - \cos x)^\gamma} dx.$$