Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

APPELLO N. 3 – PROVA SCRITTA **(21 Marzo 2016)**

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Dato l'insieme
$$A = \left\{a_n \in \mathbb{R} \mid a_n = n^3 e^{-n^2},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$
si chiede di

   1a) determinare $\inf A$ e $\sup A$, precisando se essi coincidono rispettivamente con $\min A$ e $\max A$ (con $\mathbb{N}$ indichiamo l'insieme dei numeri interi *positivi*);

   1b) dimostrare che
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq a_1 + a_2 + C,$$
dove $C = \displaystyle\int_2^{\infty} x^3 e^{-x^2}\, dx$.

2. Data
$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \qquad x < 1,$$
provare che esiste un punto $\bar{P} = (\bar{x}, f(\bar{x}))$ sul grafico G_f di f a distanza minima dall'origine $(0,0)$. Provare inoltre che tale punto è unico e che si ha $-\frac{1}{2} < \bar{x} < -\frac{1}{4}$.

3. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{2\log\sqrt{1+x} - \sqrt{x\log(1+x)}}{e^x - \cos x - \sin x}.$$

4. Si consideri la funzione $F\colon I \to \mathbb{R}$ con $I = (-1, +\infty)$, definita da
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\, dt.$$
Dimostrare che F è iniettiva. Dire se l'insieme immagine $F(I)$ è un intervallo, se è aperto/chiuso, se è limitato/illimitato. Dimostrare che per ogni $x \in I$ si ha $F(x) \leq x$.