Università degli Studi di Firenze

Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica

Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini

Appello n. 2 – prova scritta **(8 Febbraio 2016)**

Importante: Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita. Questo foglio può essere conservato, al termine della prova.

1. Determinare i vertici A, B, C e D del parallelogramma $ABCD$ circoscritto all'ellisse di equazione
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1,$$
ed avente i lati AB, CD paralleli all'asse delle ascisse e i lati BC, AD paralleli alla bisettrice del primo e terzo quadrante.

2. Disegnare un grafico qualitativo della funzione
$$g(x) = \int_x^{2x} t^4 e^{-t^2}\, dt\,,$$
dopo aver descritto le principali proprietà di g (dominio, simmetrie, comportamento asintotico, regolarità, intervalli di monotonia, esistenza di massimi e minimi relativi e/o assoluti, ecc.).

3. Data la funzione
$$f(x) = x\log(1+\sin(2x)) - (\sin x)\log(1+2x)\,,$$
si chiede di dedurre $f^{(4)}(0)$.
(Non è necessario il calcolo esplicito di alcuna derivata.)

4. Al variare del parametro $x \in \mathbb{R}$ si consideri la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^x}{(n+1)!}.$$
   (a) per quali x la serie converge?
   (b) calcolare la somma della serie per $x = 1$.

Soluzioni

1. L'ellisse di equazione **Disegno**

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{1}$$

ha semiassi di lunghezza $a = 2$ e $b = 3$ giacenti sugli assi coordinati; i due lati orizzontali del parallelogramma cercato sono tangenti all'ellisse nei punti $(0, 3)$ e $(0, -3)$ e contenuti rispettivamente nelle rette di equazione $y = 3$ e $y = -3$.

Per determinare le rette relative agli altri lati, è utile risolvere l'equazione (1) rispetto ad una delle due variabili: volendo ad esempio y in funzione di x, si ottiene

$$y(x) = 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\,, \qquad x \in [-2, 2]\,,$$

il cui grafico è l'arco di ellisse contenuta nel semipiano $y \geq 0$, e la sua opposta, con grafico simmetrico al precedente rispetto all'asse delle x.

Nei punti $(x_0, y(x_0))$ dell'ellisse ove i lati del parallelogramma sono tangenti, la derivata $y'(x_0)$ dovrà coincidere con la pendenza del lato, in questo caso 1 (essendo $y = x$ l'equazione della bisettrice del primo e terzo quadrante). Per $x = 2$ la tangente è verticale; per $x \neq 2$ si ha

$$y'(x) = 3\frac{1}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}\Big(-\frac{2x}{4}\Big) = -\frac{3x}{4\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

e risulterà $y'(x_0) = 1$ se e solo se

$$-3x_0 = 4\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{4}}\,. \tag{2}$$

Piché $-3x_0 > 0$ in (2), dovrà essere $x_0 < 0$, ed elevando al quadrato si ottiene facilmente $x_0 = -4/\sqrt{13}$, con ordinata corrispondente $y_0 := y(x_0) = 9/\sqrt{13}$.

La retta di pendenza 1 passante per (x_0, y_0) ha equazione $y = x + \sqrt{13}$, che interseca le rette di equazione $y = \pm 3$ nei punti $A = (3 - \sqrt{13}, 3)$, $D = (-3 - \sqrt{13}, -3)$. Per simmetria, si deduce che $B = (3 + \sqrt{13}, 3)$ e $C = (-3 + \sqrt{13}, -3)$.

2. Sia $f(t) = t^4 e^{-t^2}$, $t \in \mathbb{R}$: poiché f è continua in $\mathbb{R}$ e quindi anche in ogni intervallo di estremi 0 e x, la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

ha senso per ogni x (come integrale secondo Riemann) e F è una primitiva di f per il Teorema fondamentale del calcolo integrale. Di conseguenza si può esprimere g nel modo seguente:

$$g(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt = F(2x) - F(x)\,. \tag{3}$$

In alternativa e/o più semplicemente, (3) segue dalla proprietà di additività dell'integrale:

$$g(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{2x} f(t)\,dt = \int_0^{2x} f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Dominio, simmetrie, regolarità. Dalla riscrittura di g in (3) seguono immediatamente svariate proprietà di g: (i) il dominio di g coincide col dominio di F, cioè $\mathrm{dom}(g) = \mathbb{R}$; (ii) poiché f è pari, la funzione integrale F è dispari e pertanto g è *dispari* (tale proprietà di simmetria di g può essere comunque provata direttamente); inoltre, (iii) $g \in C^1(\mathbb{R})$, e si ha

$$g'(x) = 2F'(2x) - F'(x) = 2f(2x) - f(x) = 2(2x)^4 e^{-(2x)^2} - x^4 e^{-x^2} = x^4 e^{-x^2}(32e^{-3x^2} - 1)\,, \quad (4)$$

ove si è utilizzata anche la regola della catena per la derivazione della funzione composta $F(2x)$.

Comportamento asintotico. Dal momento che g è una funzione pari, è sufficiente studiarne la restrizione alla semiretta $[0, +\infty)$. Il comportamento asintotico di g, per $x \to +\infty$, segue anch'esso facilmente osservando preliminarmente che esiste finito

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^\infty f(t)\,dt =: I\,,$$

dato che f è integrabile in senso improprio sulla semiretta $[0, +\infty)$ (questo fatto può essere mostrato utilizzando la definizione di integrale in senso generalizzato, cioè partendo da $F(x)$, integrando per parti e sfruttando l'integrabilità della funzione di Gauss e^{-t^2}, oppure richiamando il criterio del confronto asintotico ed il confronto tra infiniti per la funzione $f(t)$). Ritornando a (3), si ottiene

$$g(x) = F(2x) - F(x) \longrightarrow I - I = 0\,, \qquad x \to +\infty$$

e si conclude che l'asse delle ascisse è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ (per motivi di simmetria, anche per $x \to -\infty$).

Monotonia, punti di estremo. Dall'espressione di $g'(x)$ in (4) sappiamo che $g'(x) > 0$ se e solo se $32e^{-3x^2} > 1$, cioè se e solo se $x^2 < \frac{\log(32)}{3} = \frac{5}{3}\log 2$, ovvero

$$|x| < \bar{x} := \sqrt{\frac{5}{3}\log 2}\,;$$

naturalmente si ha $g(\bar{x}) = 0$, mentre $g'(x) < 0$ per $|x| > \bar{x}$. Si deduce che g risulta crescente in senso stretto in $[0, \bar{x}]$, descrescente (in senso stretto) in $[\bar{x}, +\infty)$: il punto $\bar{x}$ è un punto di *massimo assoluto*, e dalla proprietà di (anti)simmetria di g si conclude che $-\bar{x}$ è di minimo assoluto per g.

Convessità. Infine, si ha anche $g \in C^2(\mathbb{R})$ (di fatto, $g \in C^\infty(\mathbb{R})$), con

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{d}{dx}\big(32x^4 e^{-4x^2} - x^4 e^{-x^2}\big) = 32e^{-4x^2}(4x^3 - 8x^5) - e^{-x^2}(4x^3 - 2x^5) = \\ &= x^3 e^{-x^2}[32 \cdot 4(1 - 2x^2)e^{-3x^2} - 2(2 - x^2)]\,. \end{aligned} \quad (5)$$

Non sembra facile stabilire il segno di $g''(x)$ (ma questo punto potrebbe essere esplorato proseguendo con i calcoli): tuttavia, si può almeno affermare che vi sono non meno di cinque punti di flesso: $x_0 = 0$, $x_1 \in (-\bar{x}, 0)$, $x_2 \in (0, \bar{x})$, $x_4 < -\bar{x}$, $x_5 > \bar{x}$.

Un grafico qualitativo di g è quello in Figura. **Disegno**

3. La funzione

$$f(x) = x\log(1 + \sin(2x)) - (\sin x)\log(1 + 2x)\,,$$

come somma di due funzioni appartenenti a $C^\infty(\mathbb{R})$, ammette derivate di ogni ordine (continue) in $\mathbb{R}$; in particolare , esiste $f^{(4)}(0)$, e $f^{(4)}(0) = a_4\, 4!$, dove a_4 denota il coefficiente del monomio x^4 del polinomio di Mc Laurin (di ordine quattro) di f. La formula asintotica appropriata per f si ricava utilizzando gli sviluppi di Mc Laurin (di ordine opportuno) delle funzioni seno e logaritmo, richiamati sotto:

$$\begin{aligned} &\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\,, \quad x \to 0 \\ &\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)\,, \quad y \to 0\,. \end{aligned}$$

Si deduce che

$$\sin(2x) = 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,,$$

e

$$\begin{aligned} \log(1+\sin(2x)) &= 2x - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}\Big(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\Big)^2 + \frac{1}{3}\Big(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\Big)^3 + o(x^4) = \\ &= 2x - \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}\,4x^2 + \frac{8}{3}x^3 + o(x^3) = 2x - 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)\,, \quad x \to 0\,. \end{aligned}$$

Per il minuendo di $f(x)$ vale dunque la formula seguente:

$$x\log(1+\sin(2x)) = 2x^2 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,. \tag{6}$$

D'altra parte, si ha anche

$$\begin{aligned} (\sin x)\log(1+2x) &= \Big(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\Big)\Big(2x - \frac{1}{2}4x^2 + \frac{1}{3}8x^3 + o(x^3)\Big) = \\ &= 2x^2 - 2x^3 + \frac{8}{3}x^4 - \frac{2}{6}x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,; \end{aligned}$$

e per il sottraendo vale la formula

$$(\sin x)\log(1+2x) = 2x^2 - 2x^3 + \frac{7}{3}x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,. \tag{7}$$

Combinando (7) con (6), si ottiene

$$f(x) = 2x^2 - 2x^3 + \frac{4}{3}x^4 - \big[2x^2 - 2x^3 + \frac{7}{3}x^4\big] + o(x^4) = -x^4 + o(x^4)\,, \quad x \to 0\,.$$

Per l'unicità del polinomio di Taylor si conclude che $T_4(x) = -x^4$ è il polinomio di Mc Laurin di f di ordine quattro: di conseguenza, $a_4 = -1$ e per quanto detto all'inizio $f^{(4)}(0) = -16$.

4.