

Università degli Studi di Firenze  
Corso di Laurea triennale in Fisica e Astrofisica  
Analisi Matematica I (A.A. 2015/16) – Proff. F. Bucci & E. Paolini  
PRIMA PROVA INTERCORSO (9 Novembre 2015)

**Importante:** Questo foglio può essere conservato, al termine della prova. Per l'elaborato si utilizzino fogli protocollo, completi di cognome nome e matricola scritti *in stampatello* in alto a destra. Le risposte vanno *sempre* corredate di motivazioni; le conclusioni vanno riportate in maniera chiara ed esplicita.

1. 1a) Scrivere la negazione della proposizione “Tutti gli studenti in Fisica fanno passeggiate in montagna oppure sono lettori di fantascienza, e tutti gli studenti in Matematica sanno suonare uno strumento musicale oppure amano il genere *graphic novel* (romanzi a fumetti, semplificando).  
(Naturalmente, non è sufficiente scrivere “Non è vero che ...”)
- 1b) Determinare gli estremi superiore ed inferiore dell'insieme

$$A = \{2^{(-n)^n+n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

specificando se essi sono, rispettivamente, massimo e minimo.

2. Si consideri la successione  $a_n$  definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = \frac{5}{2} - \frac{1}{a_n}. \end{cases}$$

- 2a) Dimostrare che per  $\alpha = 4/5$  si ha  $a_n = \frac{8 + 2^{2n+1}}{16 + 2^{2n}}$ ;  
2b) per  $\alpha = 2015$  calcolare il limite della successione  $a_n$ ;  
2c) per  $\alpha = 1/3$  calcolare il limite della successione  $a_n$ ;  
2d) dimostrare che se  $a_{2015} = 1/2$  allora  $\alpha = 1/2$ .

3. Data la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $f(x) = x^5 + 3x - 7$ , si chiede di

- 3a) dimostrare che  $f$  è bigettiva;  
3b) calcolare  $\lim_{y \rightarrow -3} \frac{f^{-1}(y) - 1}{y + 3}$ ;  
3c) determinare  $\beta$  in modo tale che  $\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(y)}{y^\beta} = 1$ .

4. Sia data la funzione  $f(x) = \frac{1}{x+1}$ ,  $x \geq 0$ , e siano  $A$  e  $B$  i punti di intersezione della retta tangente al grafico  $G_f$  di  $f$ , in un suo punto  $P_0$ , con gli assi coordinati (con l'asse  $x$  e l'asse  $y$ , rispettivamente). Stabilire se esiste un punto che rende massima l'area del triangolo  $OAB$  (nel caso, determinarlo).