

**Analisi Matematica II** – CdL Fisica e Astrofisica  
Quinto appello - 13 Luglio 2015

**Esercizio 1.** Disegnare l'insieme

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0, x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, x + |y| \leq 1\}.$$

Data la funzione  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = \begin{cases} \max\{|x|, |y|\} & x \leq 0, \\ x^2 + |y| & x > 0, \end{cases}$

dimostrare che  $f$  è continua.

Calcolare gli estremi assoluti di  $f$  e individuare i punti estremanti.

**Esercizio 2.** Al variare di  $n \in \mathbb{N}$  si considerino le funzioni

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{\sqrt{1 - \cos \sqrt{x}}} & x \in (0, \frac{1}{n}) \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1). \end{cases}$$

Dimostrare che, per ogni  $n \in \mathbb{N}$  la funzione  $f_n$  è sommabile in  $(0, 1)$  e calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ .

**Esercizio 3.** Sia  $S$  la semisfera di raggio  $R$  definita da

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}.$$

Calcolare le coordinate del baricentro di  $S$ .

**Esercizio 4.** Sia  $y = y(x)$  la soluzione di

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{1 - y^2}\sqrt{1 - x^2} \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Calcolare  $y(1)$ .