

Analisi Matematica II – CdL Fisica e Astrofisica
Seconda prova scritta parziale - 17 dicembre 2014

Esercizio 1. Determinare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + x^n}{n^2 + x^{2n}}.$$

Provare che la serie converge totalmente in ogni semiretta $[a, +\infty)$, $a > 1$.

Esercizio 2. Determinare gli insiemi di convergenza delle serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{(n + 1)!} x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 1}{(2n)!} x^{2n}$$

e calcolare le funzioni somma delle serie.

Esercizio 3. Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{t(1+tg^2 u)}, \\ u(-1) = \pi. \end{cases}$$

Qual è l'intervallo massimale di esistenza della soluzione?

Esercizio 4. Si consideri il seguente sistema dipendente da un parametro $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x' = px - 4y \\ y' = x \end{cases}$$

- (i) Per $p = 0$ determinare la soluzione che soddisfa le condizioni iniziali $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.
- (ii) Determinare i valori di p per i quali si ottiene una *sella*, un *nodo*, un *nodo improprio*, una *stella* un *fuoco* o un *centro*.
- (iii) Determinare i valori di p per i quali le soluzioni sono *asintoticamente stabili*.
- (iv) Per quali valori di p le soluzioni sono periodiche? Qual è il loro periodo?