Analisi Matematica I
Prova scritta n. 5

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014-2015

25 gennaio 2016

1. Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = \alpha \\ a_{n+1} = 1 + \log a_n \end{cases}$$

nei casi in cui il parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ assume i valori:

$$(a) \;\; \alpha \in [1, +\infty)\,; \qquad (b) \;\; \alpha \in (0, 1)\,.$$

2. Dimostrare che per ogni $x > 0$ si ha

$$e^x \geq x^e.$$

3. Si consideri la funzione

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x \operatorname{arctg}(e^t)\, dt$$

definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.

   (a) dire se F è pari o dispari;
   (b) calcolare il limite di $F(x)$ per $x \to 0$;
   (c) calcolare il limite di $F(x)$ per $x \to +\infty$;
   (d) dimostrare che F è strettamente crescente.

4. Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n^2)}}{n}$$

converge?