

# Analisi Matematica I

## Prova scritta n. 1

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2014-2015

5 maggio 2015

1. Si consideri la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{e^{a_n} - 1}{2} \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$

- (a) Determinare il limite della successione  $a_n$  nei casi  $\alpha = 2$  e  $\alpha = 1$ ;  
(b) per gli stessi valori di  $\alpha$  determinare il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
2. (a) Dimostrare che per ogni  $x > 0$  vale la disuguaglianza

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} > 0.$$

- (b) Studiare per  $x > 0$  la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

3. Calcolare il seguente limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - x \cos^3 x}{\sqrt{1 - \cos(x^3)}}$$

4. (a) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

- (b) Calcolare

$$\sum_{n=1}^{99} \log_{10} \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$