L'integrale di Riemann

10 aprile 2025

Definizione 1 (misura di un intervallo)**.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo limitato non vuoto. Definiamo la* misura *di I come*

$$m(I) = \sup I - \inf I$$

ovvero la distanza tra i due estremi dell'intervallo. Se I è vuoto definiamo, per convenzione, $m(I) = 0$.

Si ha, ad esempio:

$$m([1,3]) = m((1,3]) = 2.$$

Osserviamo che se un intervallo I è unione di intervalli disgiunti $I_1, I_2, \dots, I_n$ allora si ha (additività della misura)

$$m(I) = m(I_1) + \dots + m(I_n).$$

Definizione 2 (funzione caratteristica)**.** *Se $A \subset \mathbb{R}$ è un insieme, definiamo la funzione $\varphi_A \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ come*

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in A \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

La funzione φ_A si chiama funzione caratteristica *di A.*

Definizione 3 (funzione semplice)**.** *Una funzione $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$ si dice* semplice *se esiste $N \in \mathbb{N}$, e per ogni $k = 1, \dots, N$ esistono $\lambda_k \in \mathbb{R}$, e intervalli non vuoti $I_k \subset [a,b]$ tali che*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{I_k}(x).$$

Indicheremo con $\mathcal{S}_a^b$ l'insieme delle funzioni semplici definite su $[a,b]$.

Ricordiamo che lo spazio di funzioni $\mathbb{R}^{[a,b]} = \{f \colon f \colon [a,b] \to \mathbb{R}\}$ è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$. Infatti in modo naturale sono definiti la somma di due funzioni e il prodotto di una funzione per un numero reale:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

Osserviamo allora che $\mathcal{S}_a^b$ è lo spazio generato (lo *span*) dall'insieme di tutte le funzioni caratteristiche φ_I, con I intervallo contenuto in $[a,b]$, all'interno dello spazio vettoriale di tutte le funzioni $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Non è detto che gli intervalli I_k che definiscono una funzione semplice siano tra loro disgiunti. Non è neanche detto che l'unione di tutti gli I_k sia l'intero intervallo $[a,b]$. Nel lemma seguente mostriamo tuttavia che suddividendo opportunamente gli intervalli, è possibile ricondursi da una suddivisione I_k qualunque ad una suddivisione J_k formata da intervalli disgiunti la cui unione è tutto l'intervallo $[a,b]$.

Lemma 4. *Sia $f \in \mathcal{S}_a^b$ tale che*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{I_k}(x)$$

per opportuni coefficienti $\lambda_k \in \mathbb{R}$ e intervalli $I_k \subset [a, b]$. Allora esistono μ_k e J_k con $k = 1, \dots, M$ tali che

$$f(x) = \sum_{k=1}^{M} \mu_k \varphi_{J_k}(x), \qquad \sum_{k=1}^{N} \lambda_k m(I_k) = \sum_{k=1}^{M} \mu_k m(J_k)$$

e inoltre posto $a_k = \inf J_k$, $b_k = \sup J_k$ si ha:

$$a = a_1 \leq b_1 = a_2 \leq b_2 = a_3 \leq \dots \leq b_{M-1} = a_M \leq b_M = b.$$

Dimostrazione. Sia X l'insieme contenente gli estremi di tutti gli intervalli I_k e i punti a e b. L'insieme X avrà al più $2N + 2$ elementi che, ordinati, potremo chiamare $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Consideriamo allora i $2n - 1$ intervalli $J_1 = \{x_1\}$, $J_2 = (x_1, x_2)$, $J_3 = \{x_1\}$, $J_4 = (x_1, x_2)$, $J_5 = \{x_2\}$, $\dots J_{2n-3} = \{x_{n-1}\}$, $J_{2n-2} = (x_{n-1}, x_n)$, $J_{2n-1} = \{x_n\}$. Gli intervalli J_k hanno la proprietà richiesta. Ora poniamo

$$\mu_k = \sum_{j\,:\, I_j \supseteq J_k} \lambda_j$$

cosicché

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j m(I_j) = \sum_{k=1}^{N} \mu_k m(J_k)$$

in quanto ogni I_k potrà essere scritto come unione disgiunta di intervalli J_k e quindi la funzione $\lambda_k \varphi_{I_k}$ potrà essere sostituita con una somma di $\lambda_k \varphi_{J_i}$. D'altra parte con questa sostituzione la quantità $\lambda_k m(I_k)$ sarà uguale alla somma dei $\lambda_k m(J_i)$ per l'additività della misura degli intervalli. □

Lemma 5. *Sia $f \in \mathcal{S}_a^b$ tale che*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{I_k}(x)$$

per opportuni coefficienti $\lambda_k \in \mathbb{R}$ e intervalli $I_k \subset [a, b]$. Allora

$$f \geq 0 \implies \sum_{k=1}^{N} \lambda_k m(I_k) \geq 0.$$

In particolare se $f = 0$ possiamo applicare il risultato sia a f che a $-f$ ottenendo

$$f = 0 \implies \sum_{k=1}^{N} \lambda_k m(I_k) = 0.$$

Dimostrazione. Per quanto visto nel lemma precedente possiamo supporre che gli intervalli I_k siano a due a due disgiunti. In tal caso se $x \in I_k$ si ha $f(x) = \lambda_k$ e quindi $\lambda_k \geq 0$ per ogni k. Di conseguenza essendo $m(I_k) \geq 0$, si ha

$$\sum_{k} \lambda_k m(I_k) \geq 0.$$

□

Definizione 6 (integrale di una funzione semplice)**.** *Sia $f \in \mathcal{S}_a^b$. Se f si rappresenta come*

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{I_k}(x)$$

definiamo

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k m(I_k) \tag{1}$$

che potremo anche indicare con $\int_a^b f(x)\,dx$ e chiameremo integrale *di f su $[a,b]$.*

La definizione precedente è ben posta in quanto se f viene rappresentata con due diverse combinazioni di funzioni caratteristiche:

$$f = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{I_k} = \sum_{k=1}^{M} \mu_k \varphi_{J_k}$$

avremmo

$$0 = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{I_k} + \sum_{k=1}^{M} (-\mu_k) \varphi_{J_k}$$

e per il lemma precedente si avrebbe

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k m(I_k) + \sum (-\mu_k) m(J_k) = 0$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k m(I_k) = \sum \mu_k m(J_k).$$

Questo significa che la definizione precedente non dipende da come la funzione possa essere rappresentata, e quindi è una buona definizione.

Teorema 7 (proprietà dell'integrale di funzioni semplici)**.** *Le funzioni semplici soddisfano le seguenti proprietà:*

1. *(monotonia) se $f, g \in \mathcal{S}_a^b$*

$$f \le g \implies \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

2. *(linearità) se $f, g \in \mathcal{S}_a^b$, $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx,$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$$

3. *(additività rispetto al dominio) se $a \le b \le c$*

$$f \in \mathcal{S}_a^c \iff f_{|[a,b]} \in \mathcal{S}_a^b \text{ e } f_{|[b,c]} \in \mathcal{S}_b^c$$

inoltre se $f \in \mathcal{S}_a^c$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Il punto (i) è una immediata conseguenza del lemma precedente, applicato alla funzione $g - f$.

Per il punto (ii) scriviamo

$$f = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{I_k}, \qquad g = \sum_{k=1}^{M} \mu_k \varphi_{J_k}$$

e, di conseguenza,

$$\lambda f + \mu g = \sum_{k=1}^{N} \lambda \lambda_k \varphi_{I_k} + \sum_{k=1}^{M} \mu \mu_k \varphi_{J_k}.$$

Dunque

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \sum_{k=1}^{N} \lambda \lambda_k m(I_k) + \sum_{k=1}^{M} \mu \mu_k m(I_k) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Per quanto riguarda il punto (iii) osserviamo che se

$$f(x) = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k \varphi_{I_k}$$

con I_k intervalli contenuti in $[a, c]$, allora la restrizione di f ad $[a, b]$ si ottiene rimpiazzando ogni I_k con $I_k \cap [a, b]$ che è ancora un intervallo (eventualmente vuoto). Inoltre se considero le due restrizioni $f_{|[a,b]}$ e $f_{|[b,c]}$ ogni intervallo I_k viene suddiviso in due parti $I_k = (I_k \cap [a, b]) \cup (I_k \cap [b, c])$ ma risulta $m(I_k) = m(I_k \cap [a, b]) + m(I_k \cap [b, c])$ e da questo si verifica quindi che l'additività rispetto al dominio è soddisfatta da tutte le funzioni caratteristiche φ_{I_k} e di conseguenza da tutte le funzioni semplici $\sum_k \lambda_k \varphi_{I_k}$.

Resta da osservare che se $f_{|[a,b]}$ e $f_{|[b,c]}$ sono funzioni semplici, allora anche f lo è. Per far questo osserviamo che posto $g = f_{|[a,b]} + f_{|[b,c]}$ si ha che g è una funzione semplice e f coincide con g in tutti i punti tranne che nel punto b, in cui si ha $g(b) = 2f(b)$. Questo perché il punto b sta in entrambi gli intervalli $[a, b]$ e $[b, c]$. Ma allora si ha $f = g - f(b)\varphi_{[b,b]}$ che è comunque una funzione semplice. □

Definizione 8 (integrale di Riemann)**.** *Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Posto*

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi \colon \varphi \in \mathcal{S}_a^b, \varphi \le f \right\}$$

$$B = \left\{ \int_a^b \psi \colon \psi \in \mathcal{S}_a^b, \psi \ge f \right\}$$

diremo che f è Riemann-integrabile *se* $\sup A = \inf B$ *e definiremo l'*integrale di f *tra a e b come*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f = \sup A = \inf B.$$

Denoteremo con $\mathcal{R}_a^b$ l'insieme delle funzioni Riemann-integrabili.

Osserviamo che dire che f è limitata è equivalente a dire che esiste un numero λ tale che $-\lambda\varphi_{[a,b]} \le f \le \lambda\varphi_{[a,b]}$ dunque gli insiemi A e B non possono essere vuoti. Inoltre se $\varphi \le f$, $\psi \ge f$ e φ, ψ sono funzioni semplici, allora essendo $\varphi \le \psi$ si ha $\int_a^b \varphi \le \int_a^b \psi$. Questo significa che A e B sono *separati* cioè presi $a \in A$ e $b \in B$ si ha $a \le b$. Dunque è sempre vero che $\sup A \le \inf B$ e richiedere che valga l'uguaglianza

$\sup A = \inf B$ è equivalente a richiedere che A e B abbiano un unico elemento di separazione.

Osserviamo inoltre che se f è una funzione semplice risulta banalmente che f è Riemann-integrabile, in quanto scegliendo $\varphi = \psi = f$ si ha banalmente $\phi \le f \le \psi$ e $\int_a^b \varphi = \int_a^b \psi$, dunque gli insiemi A e B della definizione precedente hanno un punto in comune.

Lemma 9 (criteri di integrabilità)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Se f è Riemann-integrabile allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono φ_n, ψ_n funzioni semplici tali che $\varphi_n \le f \le \psi_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e tali che $\lim_n \int_a^b \varphi_n = \lim_n \int_a^b \psi_n = \int_a^b f$. Viceversa se esistono φ_n, ψ_n funzioni semplici con $\varphi_n \le f \le \psi_n$ e $\lim_n \int_a^b \varphi_n = L = \lim_n \int_a^b \psi_n$ allora f è Riemann-integrabile e $\int_a^b f = L$.*

Dimostrazione. Dalle proprietà dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore sappiamo che se A e B non sono vuoti devono esistere delle successioni $a_n \in A$ e $b_n \in B$ tali che $\lim_n a_n = \inf A = \int_a^b f$ e $\lim_n b_n = \sup B = \int_a^b f$. In corrispondenza ai valori a_n e b_n devono quindi esistere delle funzioni semplici φ_n e ψ_n con $\varphi_n \le f \le \psi_n$ e $\int_a^b \varphi_n = a_n$, $\int_a^b \psi_n = b_n$. Dunque la prima parte del lemma è dimostrata.

Viceversa se esistono le funzioni semplici φ_n e ψ_n con le proprietà indicate, posto $a_n = \int_a^b \varphi_n$, $b_n = \int_a^b \psi_n$ si ha che $a_n \in A$ e $b_n \in B$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e dunque $L = \lim_n a_n \le \sup A \le \inf B \le \lim_n b_n = L$. Di conseguenza deve essere $\sup A = \inf B = L$ e dunque f è Riemann-integrabile e il suo integrale vale L. $\square$

Teorema 10 (proprietà delle funzioni Riemann-integrabili)**.** *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *(monotonia) se f, g sono Riemann-integrabili allora*
$$f \le g \implies \int_a^b f \le \int_a^b g;$$

2. *(linearità) se f, g sono Riemann-integrabili e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora anche $f+g$ e λf sono Riemann integrabili, inoltre vale*
$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f;$$

3. *(additività rispetto al dominio) se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione Riemann-integrabile e $[a',b'] \subset [a,b]$ allora $f_{|[a',b']}$ è pure Riemann-integrabile; viceversa se $f\colon [a,c] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata e scelto $b \in [a,c]$ risulta che $f_{|[a,b]}$ e $f_{|[b,c]}$ sono entrambe Riemann-integrabili allora anche f è Riemann-integrabile e vale*
$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

Dimostrazione. Se f e g sono Riemann integrabili possiamo trovare, per il lemma precedente, due successioni di funzioni semplici $\varphi_n \le f$ e $\psi_n \ge g$ tali che $\int_a^b \varphi_n \to \int_a^b f$ e $\int_a^b \psi_n \to \int_a^b g$. Ma essendo $\varphi_n \le f \le g \le \psi_n$, applicando la monotonia dell'integrale per le funzioni semplici, sappiamo che $\int_a^b \varphi_n \le \int_a^b \psi_n$ e, passando al limite si ottiene la proprietà: $\int_a^b f \le \int_a^b g$.

Per quanto riguarda la somma $f+g$, possiamo prendere delle funzioni semplici $f_n^- \le f \le f_n^+$ e $g_n^- \le g \le g_n^+$ tali che $\lim_n \int_a^b f_n^- = \lim_n \int_a^b f_n^+ = \int_a^b f$ e $\lim_n \int_a^b g_n^- =$

$\lim_n \int_a^b g_n^+ = \int_a^b g$. Ma sulle funzioni semplici abbiamo già mostrato la linearità e quindi abbiamo

$$\lim_n \int_a^b (f_n^- + g_n^-) = \lim_n \int_a^b f^- n + \lim_n \int_a^b g^- n = \int_a^b f + \int_a^b g$$

e

$$\lim_n \int_a^b (f_n^+ + g_n^+) = \lim_n \int_a^b f^+ n + \lim_n \int_a^b g^+ n = \int_a^b f + \int_a^b g$$

e quindi abbiamo trovato le funzioni semplici $(f_n^- + g_n^-) \leq f + g \leq (f_n^+ + g_n^+)$ i cui integrali convergono allo stesso valore $\int_a^b f + \int_a^b g$. Ne consegue che $f + g$ è integrabile e l'integrale è la somma degli integrali.

Se $\lambda \geq 0$ e f è Riemann-integrabile possiamo trovare delle funzioni semplici $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ tali che $\lim_n \int_a^b \varphi_n = \lim_n \int_a^b \psi_n = \int_a^b f$. Ma allora $\lambda\varphi_n$ e $\lambda\psi_n$ sono anch'esse funzioni semplici e vale $\lambda\varphi_n \leq \lambda f \leq \lambda\psi_n$ e sfruttando la linearità dell'integrale sulle funzioni semplici, si trova che

$$\lim_n \int_a^b \lambda\varphi_n = \lim_n \lambda \int_a^b \varphi_n = \lambda \int_a^b f$$

e

$$\lim_n \int_a^b \lambda\psi_n = \lim_n \lambda \int_a^b \psi_n = \lambda \int_a^b f$$

dunque si può concludere che λf è Riemann-integrabile e il suo integrale vale $\int_a^b \lambda f = \lambda \int_a^b f$.

Se $\lambda < 0$ si ripete lo stesso ragionamento con l'accortezza di osservare che se $\varphi \leq f \leq \psi$ allora $\lambda\varphi \geq f \geq \lambda psi$ e quindi nell'approssimare λf le funzioni semplici superiori si scambiano con quelle inferiori.

Consideriamo ora l'additività rispetto al dominio. Innanzitutto osserviamo che se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ è Riemann-integrabile allora abbiamo delle funzioni semplici $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ definite su $[a,b]$ tali che $\lim_n \int_a^b \varphi_n = \lim_n \int_a^b \psi_n = \int_a^b f$. Inoltre sappiamo che vale l'additività per le funzioni semplici e quindi

$$\int_a^b \varphi_n = \int_a^{a'} \varphi_n + \int_{a'}^{b'} \varphi_n + \int_{b'}^b \varphi_n,$$

$$\int_a^b \psi_n = \int_a^{a'} \psi_n + \int_{a'}^{b'} \psi_n + \int_{b'}^b \psi_n$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_{a'}^{b'} (\psi_n - \varphi_n) &= \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) + \int_a^{a'} (\psi_n - \varphi_n) + \int_{b'}^b (\psi_n - \varphi_n) \\ &\leq \int_a^b \psi_n - \int_a^b \varphi_n \to 0.\end{aligned}$$

Risulta quindi che f è integrabile su $[a', b']$.

Se, viceversa, f è integrabile su $[a,b]$ e su $[b,c]$ allora esistono le funzioni semplici $\varphi'_n \leq f \leq \psi'_n$ su $[a,b]$ e $\varphi''_n \leq f \leq psi''_n$ su $[b,c]$ tali che

$$\lim_n \int_a^b \varphi'_n = \lim_n \int_a^b \psi'_n = \int_a^b f$$

e

$$\lim_n \int_b^c \varphi''_n = \lim_n \int_b^c \psi''_n = \int_b^c f.$$

Ma allora le funzioni $\varphi_n = \varphi'_n + \varphi'_n - f(b)\varphi_{[b,b]}$ e $\psi_n = \psi'_n + \psi'_n - f(b)\psi_{[b,b]}$ sono funzioni semplici che soddisfano $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ e

$$\int_a^c \varphi_n = \int_a^b \varphi'_n + \int_b^c \varphi''_n - 0 \to \int_a^b f + \int_b^c f$$
$$\int_a^c \varphi_n = \int_a^b \varphi'_n + \int_b^c \varphi''_n - 0 \to \int_a^b f + \int_b^c f$$

da cui si ottiene che f è integrabile su tutto $[a,c]$ e l'integrale su $[a,c]$ è la somma degli integrali su $[a,b]$ e $[b,c]$. □

Osserviamo, come conseguenza di queste proprietà generali, che vale:

$$\int_a^b 0 = 0$$

e

$$\int_a^a f = 0.$$

Esempio 11 (funzione non Riemann-integrabile). Sia $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f = \phi_{\mathbb{Q}}$. Allora f non è Riemann-integrabile.

Dimostrazione. Sia ϕ una qualunque funzione semplice $\phi \leq f$. Allora possiamo scrivere

$$\phi = \sum_{k=1}^N \lambda_k \phi_{I_k}.$$

con I_k intervalli disgiunti. Se $m(I_k) > 0$ l'intervallo I_k contiene almeno un numero irrazionale x, su cui $f(x) = 0$. Dunque $\lambda_k = \phi(x) \leq f(x) = 0$. Dunque $\lambda_k m(I_k) \leq 0$ per ogni k e quindi

$$\int_a^b \phi = \sum_{k=1}^N \lambda_k m(I_k) \leq 0.$$

Se invece prendiamo una qualunque funzione semplice $\psi \geq f$ e scriviamo

$$\psi = \sum_{k=1}^M \mu_k \phi_{J_k}$$

con J_k intervalli disgiunti non vuoti possiamo affermare che se $m(J_k) > 0$ allora l'intervallo J_k deve contenere almeno un punto x razionale e dunque $\mu_k = \psi(x) \geq f(x) = 1$. Dunque

$$\int_a^b \psi = \sum_{k=1}^M \mu_k m(J_k) \geq \sum_{k=1}^M m(J_k).$$

Ora posto $\inf J_k = a_k$, $\sup J_k = b_k$ e ordinando gli intervalli in modo che $a_k \leq b_k \leq a_{k+1} \leq b_{k+1}$ si dovrà avere $a_1 = 0$, $a_{k+1} = b_k$, $b_M = 1$ e quindi

$$\sum_{k=1}^M m(J_k) = \sum_{k=1}^M (b_k - a_k) = b_M - a_1 = 1.$$

Abbiamo quindi verificato che l'insieme A degli integrali delle funzioni semplici minori di f verifica $\sup A \leq 0$ mentre l'insieme B degli integrali delle funzioni semplici maggiori di f verifica $\inf B \geq 1$. Dunque la funzione f non è Riemann-integrabile. □