

**ESERCIZI DI PREPARAZIONE ALLA PRIMA PROVA  
INTERMEDIA**

ANALISI MATEMATICA I

**Esercizio 1.** Siano  $A$  e  $B$  insiemi che verificano la seguente proprietà:

$$\exists a \in A \quad \forall b \in B: b \in A \implies a = b.$$

Quali delle seguenti affermazioni sono certamente verificate?

- (1)  $A \neq \emptyset$
- (2)  $B \neq \emptyset$
- (3)  $A = B$
- (4)  $A \cap B$  ha meno di due elementi

**Esercizio 2.** Sia

$$E = \{x \in \mathbb{Q}: 1 < x^2 \leq 3, \}$$

Determinare: parte interna, chiusura, derivato di  $E$ .

**Esercizio 3.** Sia

$$A = \left\{ \frac{n^2 + n + 1}{(n + 1)^2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo dell'insieme  $A$ .

Individuare  $\mathcal{D}A$  e dire se  $A$  è chiuso o aperto.

**Esercizio 4.** Sia

$$A = \left\{ \frac{n^2 + 1}{n^3 - 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Determinare estremo superiore, estremo inferiore e, se esistono, massimo e minimo dell'insieme  $A$ .

Individuare  $\mathcal{D}A$  e dire se  $A$  è chiuso o aperto.

**Esercizio 5.** Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \sqrt{n-1}$$

e verificare il risultato usando la definizione di limite.

**Esercizio 6.** Sia  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione strettamente monotona. Quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = f(x^2)$ ?

**Esercizio 7.** Sia  $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ . Disegnare il grafico di  $f$  e il grafico di  $f \circ f$ .

**Esercizio 8.** Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n + (-2)^n}{7^n + 2^n}$$

e verificare il risultato usando la definizione di limite.

**Esercizio 9.** Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + n} - \frac{n^2}{n + 1} \right).$$

---

Date: 31 ottobre 2013.

**Esercizio 10.** *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}.$$

**Esercizio 11.** *Calcolare*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2n)!}}{2^n \sqrt[n]{n!}}$$

**Esercizio 12.** *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} 2^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[x]{\cos \sqrt{x}}$$

**Esercizio 13.** *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + \cos^2 x - 1}{x + x \sin x}$$

**Esercizio 14.** *Calcolare*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x \sin x}$$

**Esercizio 15.** *Studiare il carattere della serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left( \frac{n^2 - 1}{n^2} \right)$  calcolando esplicitamente la successione delle somme parziali.*

**Esercizio 16.** *Studiare il carattere della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{(4 + (-1)^n)^n}$ .*

**Esercizio 17.** *Studiare il carattere della serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{(4 + (-1)^n)^n}$ .*