Capitolo 1

Fondamenti

1.1 Insiemi

Il linguaggio utilizzato dalla matematica si basa sul concetto di *insieme*. Essendo questo un concetto *primitivo*, non tenteremo di definire *cos'è* un insieme, ma ci limiteremo a esporre le proprietà caratteristiche e le operazioni che ci permetteranno di operare con essi.

Diremo che un *insieme* è un oggetto matematico A per il quale ha senso chiedersi se un qualunque oggetto a ci appartiene o meno. In simboli scriveremo

$$a \in A$$

per indicare l'affermazione "a è un elemento di A" o con parole diverse "a appartiene ad A". Se A è un insieme presuporremo che tale affermazione è sempre ben definita cioè che è sempre possibile determinare se un elemento a appartiene o meno all'insieme A. Nel caso in cui $a \in A$ non vale, cioè nel caso in cui a non è un elemento di A scriveremo invece

$$a \notin A$$

che può essere letto "a non appartiene all'insieme A".

Due insiemi A e B sono uguali se vale l'equivalenza

$$x \in A \quad \Longleftrightarrow \quad x \in B$$

cioè se succede che x è un elemento di A se e soltanto se x è un elemento di B (il simbolo $\Longleftrightarrow$ indica una equivalenza tra due affermazioni e si può leggere "se e solo se"). Utilizzando una sola implicazione, possiamo invece definire il concetto di inclusione: diremo che A è un *sottoinsieme* di B e scriveremo

$$A \subseteq B$$

(leggi: "A è un sottoinsieme di B" oppure "A è incluso in B") se vale la seguente proprietà:

$$x \in A \quad \Rightarrow \quad x \in B$$

cioè se ogni elemento di A è anche elemento di B. Viceversa diremo che $A \supseteq B$ (leggi: "A è un soprainsieme di B" oppure "A contiene B") se vale la relazione inversa $B \subseteq A$.

Possiamo ora definire quello che si chiama *insieme vuoto* e che si indica con il simbolo $\emptyset$ tramite la proprietà

$$x \notin \emptyset$$

Figura 1.1: Una rappresentazione tramite diagrammi di Venn degli insiemi A e B e delle operazioni tra essi.

quale che sia x. In sostanza l'insieme vuoto è l'insieme che non contiene alcun elemento.

Un possibile modo per definire un insieme è quello di elencarne tutti gli elementi. Scriveremo l'elenco degli elementi racchiusi tra parentesi graffe. Supponendo ad esempio di aver definito cosa sono i numeri naturali $1, 2, 3, \ldots$, potremmo definire due insiemi A e B nel modo seguente:

$$A = \{1, 4\}, \qquad B = \{1, 3, 5\}. \tag{1.1}$$

Con la precedente scrittura si intende definire A come quell'insieme che ha come elementi i due numeri 1 e 4 e che non ha altri elementi. Mentre B è un insieme che ha come elementi i numeri 1, 3 e 5. In tal caso le seguenti affermazioni sono vere

$$1 \in A, \quad 1 \in B, \quad 3 \notin A, \quad 7 \notin B.$$

Con questa notazione possiamo anche definire l'insieme vuoto in questo modo alternativo:

$$\emptyset = \{\}.$$

A partire da due insiemi A e B possiamo costruire dei nuovi insiemi utilizzando le operazioni di *unione*, *intersezione* e *differenza* che si indicano rispettivamente con i simboli:

$$A \cup B, \qquad A \cap B, \qquad A \setminus B.$$

Questi nuovi insiemi sono caratterizzati dalle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} x \in A \cup B \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ o } x \in B \\ x \in A \cap B \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ e } x \in B \\ x \in A \setminus B \quad &\Longleftrightarrow \quad x \in A \text{ ma } x \notin B. \end{aligned}$$

Prendendo ad esempio gli insiemi A e B definiti in (1.1) si avrà

$$A \cup B = \{1, 3, 4, 5\}, \quad A \cap B = \{1\}, \quad A \setminus B = \{4\}, \quad B \setminus A = \{3, 5\}.$$

Le operazioni tra insiemi possono essere eseguite graficamente utilizzando i cosiddetti *diagrammi di Venn* come in figura 1.1.

Per definire l'operazione di *prodotto* tra insiemi dobbiamo definire il concetto di *coppia*. Dati due oggetti a e b chiameremo *coppia* con primo elemento a e secondo elemento b un oggetto che indichiamo con

$$(a, b)$$

è che viene identificato dalla proprietà

$$(a, b) = (c, d) \quad \Longleftrightarrow \quad a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Osserviamo che la coppia (a, b) è cosa diversa dall'insieme $\{a, b\}$. Infatti se è vero che $\{a, b\} = \{b, a\}$ (i due insiemi hanno gli stessi elementi), in generale si ha $(a, b) \neq (b, c)$ (a meno che non sia $a = b$). Per questo potremmo dire che una coppia è *un insieme ordinato formato da due elementi*. La coppia (b, a) verrà nel seguito chiamata *coppia inversa* di (a, b).

A volte può risultare utile rappresentare una coppia (a, b) tramite una freccia che si muove da a verso b:

$$a \mapsto b$$

in tal modo osserviamo che per ottenere la coppia inversa dobbiamo *invertire* la freccia: $b \mapsto a$.

Se A e B sono due insiemi, l'insieme di tutte le coppie il cui primo elemento è in A e il secondo è in B, si chiama *insieme prodotto* o *prodotto cartesiano* degli insiemi A e B e si indica con

$$A \times B.$$

Tale insieme è dunque caratterizzato dalla proprietà

$$(a, b) \in A \times B \quad \Longleftrightarrow \quad a \in A \text{ e } b \in B.$$

1.2 Relazioni

Se A e B sono insiemi e R è un sottoinsieme di $A \times B$, diremo che R è una *relazione* con *dominio* A e *codominio* B. Gli elementi di R sono dunque coppie (a, b) con $a \in A$ e $b \in B$. Per comodità di notazione scriveremo

$$aRb$$

e diremo che *a è in relazione con b* quando $(a, b) \in R$.

Ad esempio sugli insiemi

$$A = \{1, 4\}, \qquad B = \{1, 3, 5\}$$

possiamo definire la relazione "essere minore di" prendendo l'insieme R di tutte le coppie (a, b) con $a \in A$, $b \in B$ e tali che $a < b$:

$$R = \{(1, 3), (1, 5), (4, 5)\}.$$

Se R é una relazione tra A e B definiamo la sua *relazione inversa* che indichiamo con R^{-1} come quella relazione tra B e A (dominio e codominio sono scambiati) in cui nelle coppie di elementi che definiscono R vengono scambiati il primo e il secondo termine. Formalmente:

$$(b, a) \in R^{-1} \quad \Longleftrightarrow \quad (a, b) \in R.$$

In riferimento all'esempio precedente si avrà dunque:

$$R^{-1} = \{(3, 1), (5, 1), (5, 4)\}.$$

Se rappresentiamo una relazione tramite freccie:

$$\begin{aligned} R: & \\ & 1 \mapsto 3 \\ & 1 \mapsto 5 \\ & 4 \mapsto 5 \end{aligned}$$

la relazione inversa si ottiene invertendo il verso delle freccie:

$$\begin{aligned} R^{-1}: & \\ & 3 \mapsto 1 \\ & 5 \mapsto 1 \\ & 5 \mapsto 4. \end{aligned}$$

Osserviamo che i simboli $<$, $\leq$ rappresentano delle relazioni (chiamate relazioni d'ordine) e che le rispettive relazioni inverse sono $>$, $\geq$.

Capitolo 2

Funzioni

Le *funzioni* sono particolari relazioni in cui ad ogni elemento del dominio viene associato esattamente un elemento del codominio. Più precisamente, se f è una relazione tra gli insiemi A e B, diremo che f è una *funzione* con dominio A e codominio B e scriveremo:

$$f\colon A \to B$$

se per ogni $a \in A$ esiste un unico $b \in B$ tale che $(a, b) \in f$. Tale elemento b viene indicato con $f(a)$ e la relazione è dunque identificata dalle coppie:

$$a \mapsto f(a).$$

La relazione $R = \{(1, 3), (1, 5), (4, 5)\}$ che abbiamo preso in considerazione nella sezione precedente non è una funzione. Infatti in tale relazione l'elemento $1 \in A$ è associato a due elementi di B:

$$1 \mapsto 3, \qquad 1 \mapsto 5.$$

Un esempio di funzione $f\colon A \to B$ con $A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ è data dalla relazione:

$$f = \{(1, 5), (4, 1)\}$$

che potremmo anche scrivere:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ 1 &\mapsto 5 \\ 4 &\mapsto 1. \end{aligned}$$

Utilizzando la notazione tipica delle funzioni scriveremo $f(1) = 5$, $f(4) = 1$.

Molto spesso le funzioni numeriche (cioè tra insiemi formati da numeri) vengono definite mediante espressioni algebriche. Ad esempio la precedente funzione potrebbe anche essere definita come segue:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ f(x) &= \frac{19 - 4x}{3}. \end{aligned}$$

Questo modo di definire le funzioni sarà quello che useremo più spesso in quanto nel nostro studio gli insiemi A e B saranno sempre insiemi con infiniti elementi e non sarebbe quindi possibile elencare, uno per uno, tutti i valori che la funzione assume.

Vedremo in seguito che risolvere equazioni e disequazioni è un esercizio che corrisponde a studiare l'inversa di una funzione. E' quindi per noi di fondamentale

importanza capire quando la relazione inversa di una funzione f è a sua volta una funzione. In tal caso diremo che la funzione f è *invertibile*.

Perché l'inversa di una funzione f sia a sua volta una funzione, è necessario che per ogni elemento b del codominio di f esista un unico elemento a del dominio che soddisfa la relazione $f(a) = b$. In tal caso scriveremo $a = f^{-1}(b)$, diremo che f è invertibile e che la sua inversa è la funzione f^{-1}. La funzione inversa verifica quindi le relazioni:

$$f^{-1}(f(a)) = a, \qquad f(f^{-1}(b)) = b.$$

A ben guardare l'invertibilità può essere suddivisa in due richieste distinte.

1. Se per ogni elemento $b \in B$ esiste almeno un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$ diremo che la funzione f è *suriettiva*;

2. se per ogni elemento $b \in B$ esiste al massimo un elemento $a \in A$ tale che $f(a) = b$ diremo che la funzione f è *iniettiva*.

Dunque una funzione è *invertibile* se è contemporaneamente *iniettiva* e *suriettiva*. Tali funzioni si chiamano anche *biettive*.

Se f è una funzione $f\colon A \to B$ osserviamo che f:

- è *suriettiva* se per ogni $b \in B$ l'equazione $f(x) = b$ ha *almeno* una soluzione;

- è *iniettiva* se per ogni $b \in B$ l'equazione $f(x) = b$ ha *al più* una soluzione.

Una funzione è quindi invertibile o *biettiva* se l'equazione $f(x) = b$ ha esattamente una soluzione, qualunque sia $b \in B$.

Capitolo 3

I numeri reali

In questo capitolo introdurremo l'insieme $\mathbb{R}$ dei *numeri reali*, che costituiscono il principale oggetto di studio del nostro corso. Intuitivamente vogliamo che l'insieme $\mathbb{R}$ rappresenti una retta geometrica. Su questa retta verranno fissati in maniera arbitraria un punto che chiameremo 0 (zero) ed un altro punto che chiameremo 1. Vorremo inoltre poter eseguire le due operazioni elementari $+$ (somma) e $\cdot$ (prodotto) e vorremo avere a disposizione una relazione d'ordine $\geq$. Vorremo inoltre che tali operazioni abbiano tutte le buone proprietà che ci aspettiamo debbano avere.

Il nostro approccio sarà assiomatico. Supporremo, cioè, che un insieme siffatto esista, senza porci il problema di come tale insieme possa essere costruito tramite insiemi più semplici.

3.1 Gli assiomi dei numeri reali

L'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un insieme che contiene almeno due elementi $0 \in \mathbb{R}$, $1 \in \mathbb{R}$, e sul quale sono definite due operazioni chiamate *addizione* e *moltiplicazione*:

$$\begin{aligned} +\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a + b \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

e una relazione $\geq$ (*maggiore o uguale*) che soddisfano le seguenti proprietà.

proprietà algebriche

1. *proprietà associativa* $(a + b) + c = a + (b + c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2. *proprietà commutativa* $a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$;
3. *proprietà distributiva* $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;
4. *elementi neutri* $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$;
5. *operazioni inverse* per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $a + b = 0$, se inoltre $a \neq 0$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot c = 1$.

proprietà di ordinamento

1. *dicotomia* se a e b sono elementi di $\mathbb{R}$ si ha che almeno una delle due proprietà $a \geq b$ o $b \geq a$ è soddisfatta; e se le due proprietà $a \geq b$ e $b \geq a$ sono contemporaneamente soddisfatte, allora $a = b$;
2. *monotonia* se $a > b$ allora $a + c > b + c$;
3. *positività* se $a > 0$ e $b > 0$ allora $a + b > 0$ e $a \cdot b > 0$.

completezza

1. se A e B sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si abbia $b \geq a$ allora esiste almeno un elemento $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $a \in A$ si ha $c \geq a$ e per ogni $b \in B$ si ha $b \geq c$.

Osserviamo come i primi due gruppi di assiomi enunciano le proprietà delle operazioni elementari (somma e prodotto) che tutti abbiamo studiato fin dalla scuola elementare. Molte altre proprietà elementari si possono dedurre da questo elenco.

Le operazioni di *sottrazione* e *divisione* possono essere definite a partire dagli assiomi, sfruttando l'esistenza delle operazioni inverse. Ad esempio l'operazione $a - b$ è definita come la somma tra a e l'opposto di b: $a - b = a + (-b)$. In maniera analoga si definisce la divisione. Le relazioni $>$, $\leq$ e $<$ si definiscono a partire da $\geq$ come ci aspettiamo:

$$\begin{aligned} a > b &\iff a \geq b \text{ e } a \neq b \\ a \leq b &\iff b \geq a \\ a < b &\iff b \geq a \text{ e } b \neq a \end{aligned}$$

L'insieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali* può essere definito facilmente utilizzando solamente il numero 1 (dato per assioma) e l'addizione: $2 = 1 + 1$, $3 = 1 + 1 + 1 \ldots$ Utilizzando la sottrazione e la divisione potremo quindi definire l'insieme $\mathbb{Z}$ dei *numeri interi* e l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali. Tutto questo può essere fatto utilizzando i primi due blocchi di assiomi, senza scomodare l'assioma di completezza.

L'assioma di completezza, infatti, serve per definire i cosiddetti numeri *irrazionali*. Per dare un esempio vediamo come potrebbe essere definito il numero $\sqrt{2}$. Consideriamo gli insiemi:

$$A = \{a \in \mathbb{R} \colon a^2 < 2\}, \qquad B = \{b \in \mathbb{R} \colon b > a \text{ per ogni } a \in A\}.$$

E facile verificare che questi due insiemi possono essere utilizzati nell'assioma di completezza, infatti l'insieme B è stato appositamente definito in modo tale che per ogni $a \in A$ e per ogni $b \in B$ si abbia $a < b$. Dunque l'assioma ci garantisce l'esistenza di un numero reale c tale che $c \geq a$ per ogni $a \in A$ e $c \leq b$ per ogni $b \in B$.

A questo punto si può dimostrare (ma la dimostrazione, pur elementare, è troppo complessa per essere svolta in poche righe) che $c^2 = 2$ e $c > 0$. Dunque c è il numero che normalmente denotiamo con $\sqrt{2}$. La dimostrazione di questo fatto è piuttosto complessa e per ora la omettiamo essendo il nostro scopo solamente quello di intuire l'utilità degli assiomi sopra esposti.

Un risulato di notevole rilevanza storica è il fatto che il numero $c = \sqrt{2}$ appena definito nell'ambito dei numeri reali, non è in effetti un numero razionale.

Teorema 3.1.1 (Pitagora)**.** *Non esiste nessun numero $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$. Il fatto che x sia razionale implica l'esistenza di due numeri interi $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ tali che $x = \frac{p}{q}$. Supponiamo inoltre che la frazione $\frac{p}{q}$ sia ridotta a i minimi termini, cioè che i numeri p e q non abbiano un fattore in comune. Ma dall'equazione $(p/q)^2 = 2$ avremo

$$p^2 = 2q^2$$

da cui deduciamo che p^2 è pari. Osserviamo ora che se p fosse dispari si avrebbe che anche p^2 sarebbe dispari. Dunque necessariamente p è pari. Ma se p è pari potremo scrivere $p = 2m$ con m intero. Avremo quindi $p^2 = (2m)^2 = 4m^2$. Ma $p^2 = 2q^2$ e quindi $q^2 = 2m^2$. Di nuovo deduciamo che q^2 è pari e di conseguenza anche q è

pari. Ma allora p e q essendo entrambi divisibili per 2 hanno un fattore in comune, contro l'ipotesi che avevamo inizialmente formulato.

Otteniamo quindi un assurdo, e la dimostrazione e conclusa. $\square$

3.2 Le funzioni reali

Le funzioni con dominio e codominio nei numeri reali

$$f\colon A \to B, \qquad A \subseteq \mathbb{R}, \quad B \subseteq \mathbb{R}$$

sono il principale oggetto di studio del nostro corso.

Osserviamo che, per come abbiamo definito il concetto di relazione, una funzione di questo tipo è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ma l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ può essere identificato con il *piano cartesiano*. La corrispondenza tra i punti del piano *geometrico* e il prodotto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si ottiene scegliendo un punto e due rette (di solito ortogonali) passanti per quel punto. Il punto scelto viene chiamato *origine* del sistema cartesiano e spesso viene indicato con la lettera O. Su ognuna delle due rette viene inoltre fissato un punto che rappresenterà l'unità di misura lungo quella retta e che identifica una orientazione della retta.

La prima di queste due rette viene chiamato *asse delle ascisse* e normalmente viene disegnata come una retta orizzontale orientata verso destra. La seconda retta viene chiamata *asse delle ordinate* e normalmente viene disegnata come una retta verticale orientata verso l'alto. Da ogni punto P del piano geometrico si possono tracciare le due rette parallele agli assi coordinati. La retta parallela all'asse delle ordinate interseca l'asse delle ascisse in un punto che, tramite la distanza con segno dall'origine, può essere associato ad un numero reale x. Questo numero viene chiamato *ascissa* del punto P. La retta parallela all'asse delle ascisse interseca invece l'asse delle ordinate in un punto che può essere rappresentato da un numero reale y. Tale numero viene detto *ordinata* del punto P. Dunque il punto P può essere rappresentato da una coppia di numeri reali (x, y) ovvero da un elemento dell'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Visto che la funzione f è un sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, identificando $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con il piano geometrico, la funzione f può essere identificata con una curva in tale piano. Tale curva viene chiamata *grafico*[1]. La possibilità di rappresentare una funzione mediante un grafico, ci permette di *visualizzare* le funzioni e quindi di poterle maneggiare con più facilità rispetto ad un astratto concetto matematico.

Per queste funzioni introduciamo i seguenti concetti, che saranno di fondamentale importanza per il seguito.

Definizione 3.2.1. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f\colon A \to B$ una funzione. Diremo che*

- f *è* crescente *se*
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$
- f *è* strettamente crescente *se*
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$

[1] In molti libri viene data la definizione

$$\Gamma_f = \{(x, y)\colon y = f(x)\}$$

e l'insieme Γ_f viene chiamato il *grafico di f*. Per noi si ha $\Gamma_f = f$, per come sono state definite le relazioni. Per non creare confusione anche noi non sfrutteremo mai il fatto che $\Gamma_f = f$. In particolare non scriveremo mai $(x, y) = f$ ma preferiremo sempre la notazione $y = f(x)$ anche se a ben guardare le due scritture sono per noi equivalenti.

- f *è* decrescente *se*
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2);$$
- f *è* strettamente decrescente *se*
$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2);$$

Si dirà che una funzione è *monotòna* se è crescente o decrescente mentre diremo che è *strettamente monotòna* se è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Una funzione che è contemporaneamente crescente e decrescente verifica l'uguaglianza $f(x_1) = f(x_2)$ per ogni x_1, x_2 sul suo dominio, cioè esiste un $c \in \mathbb{R}$ tale che $f(x) = c$ per ogni x. Una tale funzione si dice essere *costante*.

Non è detto che una qualunque funzione debba necessariamente ricadere in una delle categorie appena esposte. Ad esempio la funzione $f(x) = x^2$ non è né crescente né decrescente. Non è crescente perché pur essendo $-1 < 0$ si ha $f(-1) > f(0)$. Non è decrescente perché pur essendo $0 < 1$ si ha $f(0) < f(1)$.

Osserviamo infine che le funzioni strettamente monotone sono anche iniettive, in quanto non è possibile che una funzione strettamente monotona assuma due volte lo stesso valore.

3.3 Funzioni elementari

In questa sezione descriveremo brevemente alcune funzioni che chiameremo *elementari* perché è combinando tra loro queste funzioni che otterremo le funzioni più complesse sulle quali svolgeremo i nostri esercizi.

3.3.1 Funzioni lineari

Le funzioni lineari sono le funzioni che si possono esprimere nella forma
$$f(x) = mx + q$$
con m e q parametri reali fissati. Il grafico di queste funzioni è la retta dei punti (x, y) che soddisfa l'equazione
$$y = mx + q.$$
Osserviamo che il parametro q, chiamato *intercetta*, identifica l'ordinata dell'intersezione di tale retta con l'asse delle ascisse $x = 0$, infatti si ha $f(0) = q$. Il parametro m, invece, si chiama *coefficiente angolare* e determina l'inclinazione della retta rispetto all'asse delle x. Se $m = 0$ avremo una funzione costante $f(x) = q$ che ha come grafico una retta orizzontale. Se $m > 0$ la funzione $f(x)$ è strettamente crescente mentre se $m < 0$ la funzione $f(x)$ è strettamente decrescente.

Se $m \neq 0$ la funzione $f(x) = mx + q$ è invertibile. Infatti dall'equazione $y = mx + q$ possiamo ricavare la x sottraendo ad ambo i membri q e dividendo per m. Si ottiene quindi $x = (y - q)/m$ che è a sua volta una funzione lineare con coefficiente angolare $1/m$.

Le funzioni lineari hanno le seguenti proprietà caratteristiche, che possono essere dimostrate per verifica diretta:
$$f(x + y) = f(x) + f(y), \qquad f(xy) = xf(y).$$

3.3.2 Il valore assoluto

La funzione *valore assoluto* che denotiamo con $x \mapsto |x|$ è definita nel seguente modo:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Osserviamo quindi che qualunque sia x si ha $|x| \geq 0$. Questa funzione soddisfa inoltre le seguenti importanti proprietà:

$$|xy| = |x| \cdot |y|, \qquad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Spesso il valore assoluto viene utilizzato nelle disuguaglianze, osserviamo che si ha:

$$|x| < M \iff -M < x < M.$$

3.3.3 Funzioni quadratiche

Consideriamo come prototipo la funzione $x \mapsto x^2$ ovvero $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Il grafico di tale funzione è una parabola con vertice nell'origine e asse parallelo all'asse delle ordinate. Chiaramente la funzione non è monotona globalmente ma è strettamente decrescente sull'intervallo $]-\infty, 0]$ e strettamente crescente sull'intervallo $[0, +\infty[$. Con un ragionamento analogo a quello che abbiamo fatto per dimostrare che l'equazione $x^2 = 2$ ha una soluzione positiva, potremmo dimostrare che l'equazione $x^2 = y$ ha una soluzione $x \geq 0$ per ogni $y \geq 0$. Dunque la funzione $x \mapsto x^2$ ristretta ai numeri non negativi, è invertibile. La funzione inversa viene chiamata *radice quadrata* e si rappresenta con la mappa $x \mapsto \sqrt{x}$. Tale funzione è dunque definita solo sull'insieme dei numeri non negativi $x \geq 0$.

Per definizione di funzione inversa la radice quadrata di un numero non negativo y è l'unica soluzione non negativa dell'equazione:

$$x^2 = y.$$

Dunque per definizione $\sqrt{y} \geq 0$. Ricordiamo però che la precedente equazione ha anche una soluzione negativa, e quindi in generale possiamo dire che l'equazione precedente se $y \neq 0$ ha due soluzioni date da:

$$x_1 = \sqrt{y}, \qquad x_2 = -x_1 = \sqrt{y}.$$

Per brevità scriveremo $x_{1,2} = \pm\sqrt{y}$ per indicare contemporaneamente l'espressione che definisce entrambe le soluzioni.

Le funzioni della forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

dove a, b, c sono parametri reali e $a \neq 0$, sono dette *funzioni quadratiche*. Questa è, in effetti, la famiglia di tutti i polinomi di grado 2 in x. Il grafico di ognuna di queste funzioni può essere ricondotto tramite traslazioni e riscalamenti al grafico della funzione $y = x^2$. Anche il grafico di queste funzioni è quindi dato da una parabola con asse parallelo all'asse delle ordinate.

Proviamo ora a risolvere l'equazione $f(x) = 0$ utilizzando il metodo del *completamento del quadrato*:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}] \\ &= a\left[x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right] \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \end{aligned}$$

posto $\Delta = b^2 - 4ac$ la precedente espressione si annulla se

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

cioè, moltiplicando tutto per $4a^2$, se

$$(2ax + b)^2 = \Delta. \tag{3.1}$$

Se $\Delta < 0$ questa equazione non ha soluzioni in quanto il lato sinistro, essendo un quadrato, non può essere negativo. Dunque in questo caso l'equazione iniziale $f(x) = 0$ non ha soluzioni e questo significa che il grafico della parabola $y = f(x)$ non incontra l'asse delle x. In particolare se $a > 0$ la funzione assume solo valori positivi, mentre se $a < 0$ assume solamente valori negativi.

Se $\Delta = 0$ significa che l'equazione $f(x) = 0$ ha una sola soluzione che si ottiene risolvendo l'equazione

$$(2ax + b)^2 = 0 \iff 2ax + b = 0 \iff x = -\frac{b}{2a}.$$

Questo accade quando la parabola tocca, con il proprio vertice, l'asse delle x.

Se $\Delta > 0$ l'equazione ha due soluzioni che si possono ricavare dall'equazione (3.1):

$$\begin{aligned} 2ax_1 + b &= \sqrt{\Delta} \\ 2ax_2 + b &= -\sqrt{\Delta} \end{aligned}$$

da cui

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3.3.4 Funzione potenza

Tramite la moltiplicazione possiamo definire le potenze con esponente intero:

$$x^1 = x, \qquad x^2 = x \cdot x, \qquad x^3 = x \cdot x \cdot x, \qquad \dots$$

E' facile verificare che queste potenze soddsfiano le seguenti proprietà:

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \tag{3.2}$$

$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha y^\beta \tag{3.3}$$

$$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}. \tag{3.4}$$

Ad esempio la terza proprietà con $\alpha = 3$ e $\beta = 2$ è verificata in quanto:

$$(x^3)^2 = (x \cdot x \cdot x)^2 = (x \cdot x \cdot x) \cdot (x \cdot x \cdot x) = x^6$$

le altre prorietà si verificano in modo simile. La potenza x^α con esponente α intero non negativo è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$. Se $x \neq 0$ possiamo definire

$$x^{-\alpha} = \frac{1}{x^\alpha}$$

e si può verificare che (3.2) continuano a valere. Ad esempio:

$$x^{2-3} = x^{-1} = \frac{1}{x} = x^2 \cdot \frac{1}{x^3} = x^2 \cdot x^{-3}.$$

In modo analogo a quanto fatto con la funzione $x \mapsto x^2$ osserviamo che tutte le potenze con esponente pari $x \mapsto x^n$ sono invertibili sui numeri non negativi: $[0, +\infty[$. Le potenze con esponente dispari sono anche meglio perché sono invertibili su tutto $\mathbb{R}$. Possiamo dunque definire la *radice n-esima* $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ come le funzioni inversa della funzione potenza x^n. Le radici di ordine pari sono definite solo per $x \geq 0$ e danno sempre un risultato non negativo. Le radici di ordine dispari sono definite per ogni x e danno un risultato negativo se $x < 0$. In particolare osserviamo che l'equazione

$$x^n = y$$

se n è pari e $y > 0$ ha due soluzioni reali, una positiva e una negativa:

$$x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{y}$$

mentre se n è pari e $y < 0$ non ha soluzioni. Se invece n è dispari, per qualunque y si ha una sola soluzione:

$$x = \sqrt[n]{y}$$

che è positiva se $y > 0$ e negativa se $y < 0$.

Per estendere la funzione potenza x^α a tutti gli esponenti $\alpha \in \mathbb{R}$ supponiamo d'ora in poi che $x \geq 0$. Le potenze con esponente razionale possono allora essere definite utilizzando le radici:

$$x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

ancora una volta si può verificare che per $x \geq 0$ valgono tutte le proprietà delle potenze (3.2). Ad esempio:

$$x^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = x^2 = \sqrt{x^4} = \sqrt{x}\sqrt{x^3} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}.$$

Si osservi come la precedente uguaglianza non può essere scritta per $x < 0$ per la presenza del termine $\sqrt{x}$.

Utilizzando l'assioma di completezza dei numeri reali è possibile definire tutte le potenze x^α con esponente α reale qualunque e base $x > 0$. Supponiamo innanzitutto che sia $\alpha > 0$. In tal caso fissato x e α si può considerare l'insieme

$$A = \{x^{\frac{p}{q}} \in \mathbb{R} \colon \frac{p}{q} < \alpha\}$$

cioè l'insieme di tutte le potenze con un esponenente razionale inferiore ad α. Dopodiché considerando

$$B = \{b \in \mathbb{R} \colon b > a \text{ per ogni } a \in A\}$$

è chiaro che gli insiemi A e B soddisfano le condizioni dell'assioma di completezza e l'elemento di separazione sarà unico e verrà preso come definizione di x^α.

In questo modo abbiamo definito x^α per qualunque $x \geq 0$ e $\alpha \geq 0$. Per $\alpha < 0$ si definisce $x^{-\alpha} = 1/x^\alpha$ e per $\alpha = 0$ ovviamente $x^0 = 1$. Facendo delle considerazioni piuttosto complesse si può ancora arrivare a dimostrare che le proprietà delle potenze (3.2) continuano a valere.

3.4 Funzione esponenziale

Se la funzione $x \mapsto x^\alpha$ è una funzione in cui l'esponente α è fissato e si fa variare la base x, la funzione *esponenziale* è sempre una potenza, ma ora si considera la base fissata e si fa variare l'esponente:

$$x \mapsto a^x.$$

Visto che l'esponente è un numero reale qualunque, la base a dovrà necessariamente essere positiva: $a > 0$.

Questa funzione risulta essere strettamente crescente e positiva su tutto il suo insieme di definizione $x \in \mathbb{R}$. Risulta inoltre che tale funzione ristretta ai valori positivi: $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è anche surgettiva e quindi è invertibile. La funzione inversa si chiama *logaritmo* e si indica con:

$$\begin{aligned}]0, +\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x. \end{aligned}$$

Si hanno dunque le proprietà caratterizzanti la funzione inversa:

$$a^{\log_a x} = x, \qquad \log_a(a^x) = x.$$

Dalle proprietà delle potenze ricaviamo le seguenti proprietà per l'esponenziale e il logaritmo:

$$\begin{array}{cccc} e^{x+y} = e^x e^y, & (e^x)^y = e^{xy}, & e^0 = 1 & e^1 = e \\ \log(xy) = \log x + \log y & \log(x^y) = y \log x & \log 1 = 0 & \log e = 1. \end{array}$$

3.5 Funzioni trigonometriche

Le funzioni trigonometriche possono essere definite in maniera geometrica. Consideriamo la cironferenza unitaria centrata nell'origine di un sistema di coordinate cartesiane. L'equazione della circonferenza è data dal teorema di Pitagora:

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Indichiamo con π metà della lunghezza di tale circonferenza (prendiamo questa come definizione di π). Dato un numero reale α consideriamo ora un arco di circonferenza che *parte* dal punto $(1, 0)$ e, procedendo in verso antiorario percorre una lunghezza pari ad α lungo la circonferenza. Se $\alpha < 0$ dobbiamo procedere in senso orario per una lunghezza pari a $|\alpha|$. Il punto finale di questo arco avrà coordinate (x, y) e per definizione poniamo $\cos\alpha = x$, $\sin\alpha = y$.

Più brevemente diremo quindi che $\cos\alpha$ e $\sin\alpha$ sono le coordinate x e y del punto della circonferenza unitaria che identifica un arco di lunghezza α a partire dal punto $(1, 0)$ in senso antiorario. La lunghezza dell'arco di circonferenza unitaria è chiamata misura *in radianti* dell'angolo corrispondente.

Per come sono state definite vale la proprietà:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Inoltre è chiaro che $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ assumono sempre valori compresi tra -1 e 1.

Il rapporto tra queste funzioni ci permette di definire la funzione *tangente*:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

La funzione tangente è definita se $\cos x \neq 0$ ovvero quando $x \neq \pi/2 + k\pi$ con $x \in \mathbb{Z}$.

Dalle proprietà dei triangoli rettangoli è possibile ricavare i seguenti valori per alcuni angoli notevoli:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$3\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\nexists$	0	$\nexists$

inoltre è possibile dimostrare le seguenti relazioni (formule di *addizione*):

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

In particolare si hanno le seguenti importanti relazioni:

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \qquad \cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right), \qquad \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right).$$

Dalle formule di addizione e ricordando che $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha$ osserviamo che

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

da cui otteniamo la formula di *bisezione*

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

Il grafico delle funzioni $y = \sin x$ e $y = \cos x$ ha un andamento oscillante (Figura **??**. Le funzioni $\sin x$ e $\cos x$ sono *periodiche* di periodo 2π, in quanto vale la relazione:

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x), \qquad \cos(x+2\pi) = \cos(x).$$

La funzione $\sin x$ risulta essere strettamente crescente sull'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Su tale intervallo la funzione $[-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ risulta quindi essere invertibile. La funzione inversa si chiama *arcoseno* e si indica con il simbolo $\arcsin\colon [-1,1] \to [-\pi/2, \pi/2]$. Dalla definizione di funzione inversa si hanno le seguenti proprietà per ogni $x \in [-\pi, 2, \pi/2]$ e per ogni $y \in [-1, 1]$:

$$\sin\arcsin y = y, \qquad \arcsin\sin x = x$$

Osserviamo che la prima relazione è definita solo per $y \in [-1, 1]$ e quindi è sempre valida. La seconda relazione, invece, è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ ma è verificata solo per $x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

La funzione $\cos x$ risulta essere strettamente decrescente se ristretta all'intervallo $[0, \pi] \to [-1, 1]$. Su tale intervallo risulta essere invertibile e la funzione inversa si chiama *arcocoseno* e si indica con il simbolo arccos. Abbiamo quindi definito una funzione $\arccos\colon [-1,1] \to [0,\pi]$ che soddisfa per ogni $x \in [0, \pi]$ e per ogni $y \in [-1, 1]$ le proprietà

$$\cos\arccos y = y, \qquad \arccos\cos x = x.$$

La funzione $\operatorname{tg} x$ risulta strettamente crescente se ristretta all'intervallo $]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$. In tale intervallo la funzione risulta invertibile e la funzione inversa si chiama *arcotangente* e si indica con $\operatorname{arctg}\colon \mathbb{R} \to]\pi/2, \pi/2[$. Dalle proprietà della funzione tangente si ricava la seguente utile identità:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \qquad \text{per } x > 0.$$

Capitolo 4

Limiti e continuità

Il concetto di limite ci permette di descrivere il comportamento di una funzione $f(x)$ vicino ad un punto fissato x_0. Oltre che nei punti del dominio il limite si può calcolare nei punti della *frontiera*. In particolare sarà utile definire i limiti anche agli estremi dell'intera retta reale. Si andranno quindi ad utilizzare i simboli $+\infty$ e $-\infty$ che rappresentano, rispettivamente, l'estremo superiore e inferiore dell'intera retta dei numeri reali.

Se $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$ diremo che per x che *tende* a x_0 la funzione $f(x)$ *tende* ad ℓ e scriveremo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \colon |x - x_0| < \delta, x \neq x_0 \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

In questa definizione si intende inoltre che x viene sempre scelto nel dominio della funzione f. Un altra notazione per scrivere lo stesso limite è il seguente:

$$f(x) \to \ell \qquad \text{per } x \to x_0.$$

Per definire anche i limiti che coinvolgono i punti *all'infinito*, conviene riscrivere la definizione precedente con una nuova notazione. Chiamiamo $\mathcal{U}_{x_0}$ l'insieme degli intervalli aperti centrati in x_0, ossia:

$$\mathcal{U}_{x_0} = \big\{ \,]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\, : \varepsilon > 0 \big\}.$$

La definizione di limite diventa allora:

$$\forall V \in \mathcal{U}_\ell \quad \exists U \in \mathcal{U}_{x_0} \colon x \in U, x \neq x_0 \implies f(x) \in V. \tag{4.1}$$

Gli elementi di $\mathcal{U}_{x_0}$ vengono chiamati *intorni fondamentali* di x_0. La precedente definizione rimane valida anche per i limiti all'infinito, basta definire quali sono gli intorni fondamentali di $+\infty$ e $-\infty$. Lo facciamo nel modo seguente:

$$\mathcal{U}_{+\infty} = \big\{ \,]M, +\infty[\, : M \in \mathbb{R} \big\}, \qquad \mathcal{U}_{-\infty} = \big\{ \,]-\infty, M[\, : M \in \mathbb{R} \big\}.$$

Con queste definizioni troviamo ad esempio che il limite

$$\lim_{x \to 7} f(x) = +\infty$$

si traduce in

$$\forall M \ \exists \delta > 0 \colon |x - 7| < \delta, x \neq x_0 \implies f(x) > M.$$

Mentre il seguente

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$$

si traduce in

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists M \colon x < M \implies |f(x) - 2| < \varepsilon.$$

4.1 operazioni con i limiti

Per calcolare il limite di una espressione complessa, è molto utile riuscire a ricavare il limite di una espressione composta mediante operazioni sui limiti delle componenti. Ad esempio è possibile dimostrare che se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a, \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = b$$

allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = a + b.$$

Questo è vero qualunque sia x_0 (anche $x_0 = +\infty$ o $x_0 = -\infty$ è ammesso) e se a e b sono numeri reali. Più in generale è vero in certi casi anche quando a e b sono infiniti, se diamo le seguenti definizioni per la somma $a + b$. Se $a \in \mathbb{R}$ poniamo:

$$a + \infty = +\infty, \qquad a - \infty = -\infty$$

inoltre poniamo

$$+\infty + \infty = +\infty, \qquad -\infty - \infty = -\infty.$$

Rimane quindi solo fuori il caso

$$+\infty - \infty$$

che viene chiamata *forma indeterminata* in quanto in una tale situazione non si può applicare il risultato precedente.

Considerazioni analoghe si possono fare per il limite del prodotto e del rapporto:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) \qquad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}.$$

Questa formula è valida quando i limiti al lato destro esistono e se non siamo in una delle seguenti *forme indeterminate*:

$$\infty \cdot 0, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

Se in una espressione, per quanto complessa, non sono presenti forme indeterminate, e se le funzioni coinvolte sono tutte continue, il calcolo del limite si riduce a sostituire il valore limite nell'espressione. Ad esempio:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{e^{x+2} + x}}{x + \operatorname{arctg} x} = \frac{\sqrt{e^{1+2} + 1}}{1 + \operatorname{arctg} 1} = \frac{e^3 + 1}{1 + \frac{\pi}{4}}.$$

I casi interessanti risultano quindi solamente quelli in cui ci si trova di fronte a forme indeterminate. Per risolvere i limiti che coinvolgono le forme indeterminate dovremo manipolare l'espressione in modo da ricondursi a *limiti notevoli* (cioè a limiti di cui già conosciamo il risultato) o ad espressioni senza forme indeterminate.

Ad esempio il limite seguente è una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1}{1 - 3x^3}$$

ma raccogliendo a numeratore e denominatore il termine x^3 si può modificare l'espressione in modo da eliminare la forma indeterminata:

$$\begin{aligned}\frac{x^3 + 3x^2 + 1}{1 - 3x^3} &= \frac{x^3}{x^3} \cdot \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} - 3} \\ &= \frac{1 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x^3} - 3}.\end{aligned}$$

Il limite, riscritto in questo modo, può quindi essere risolto per sostituzione, e il risultato è $-\frac{1}{3}$.

In molte situazioni, quando abbiamo una forma indeterminata del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ oppure $\frac{0}{0}$ bisogna procedere raccogliendo a numeratore e denominatore il termine *più grande*. In particolare quando $x \to +\infty$ è utile sapere che valgono i seguenti limiti notevoli, validi per ogni esponente $\alpha > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

Questi limiti vengono facilmente ricordati dicendo che i logaritmo tende a infinito *più lentamente* di qualunque potenza, e a sua volta ogni potenza tende a infinito *più lentamente* dell'esponenziale.

4.2 continuità

Una funzione $f(x)$ si dice *continua in un punto* x_0 del suo dominio, se

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Sostanzialmente si sta chiedendo che nei punti *vicini* al punto x_0 il valore della funzione $f(x)$ sia arbitrariamente vicino al valore $f(x_0)$.

Diremo che una funzione f è *continua* se essa è continua in ogni punto del proprio dominio.

Dimostriamo, come esempio, che la funzione $f(x) = 1/x$ è continua. Preso qualunque $x_0 \neq 0$ dobbiamo mostrare che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}.$$

Dato qualunque $\varepsilon > 0$ dobbiamo quindi essere in grado di determinare $\delta > 0$ tale che per $|x - x_0| < \delta$ si abbia $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Osserviamo che

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{xx_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|xx_0|}.$$

Osserviamo ora che se $|x - x_0| < \delta$ e se scegliamo $\delta < |x_0|/2$ si ha

$$|xx_0| = |x| \cdot |x_0| > |x_0 - \delta| \cdot |x_0| > \frac{|x_0|}{2}|x_0| = \frac{x_0^2}{2}.$$

Dunque riprendendo la precedente catena di uguaglianze troviamo

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{|x - x_0|}{x_0^2/2} < \frac{2\delta}{x_0^2}.$$

Se ora scegliamo δ in modo che si abbia anche $\delta < \varepsilon x_0^2/2$, si ottiene infine

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Questo dimostra che la funzione $f(x) = 1/x$ è continua in ogni punto $x_0 \neq 0$ e quindi è una funzione continua.

In effetti si potrebbe dimostrare che tutte le funzioni che abbiamo visto fin'ora sono funzioni continue. Inoltre vale il seguente teorema.

Teorema 4.2.1 (continuità delle funzioni composte)**.** *Se $f(x)$ e $g(x)$ sono funzioni continue, allora anche le funzioni:*

$$f(g(x)), \qquad f(x)+g(x), \qquad f(x)-g(x), \qquad f(x)\cdot g(x), \qquad \frac{f(x)}{g(x)}$$

sono funzioni continue.

Dal teorema precedente si evince che qualunque espressione che sia scritta tramite composizione di funzioni elementari definisce una funzione continua.

4.3 Derivata

Fissato un punto x nel dominio di una funzione f e fissato un numero reale $h \neq 0$ il rapporto

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

viene chiamato *rapporto incrementale* della funzione f nel punto x per un incremento h. Questa quantità rappresenta la pendenza della retta passante per i punti di coordinate $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+y))$. Al limite per $h \to 0$ possiamo immaginare che tale retta *secante* converga a quella che viene chiamata la *retta tangente*. Dunque il limite

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

se esiste, rappresenta la pendenza (cioè il coefficiente angolare) della retta tangente al grafico della funzione f nel punto $(x, f(x))$. Se in un punto x tale limite esiste ed è finito, diremo che la funzione f è *derivabile* in x e chiameremo $f'(x)$ la *derivata* di f calcolata nel punto x.

In effetti abbiamo osservato che f', la derivata di f, risulta essere essa stessa una funzione il cui dominio sono i punti del dominio di f in cui f è derivabile. Può risultare utile adottare diverse notazioni per la derivata di una funzione. Ecco quelle che potremmo trovare:

$$f'(x) = Df(x) = \frac{df}{dx}(x) = f_x(x).$$

Dal punto di vista geometrico abbiamo detto che la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione. Dunque fissato un punto x_0 nel dominio di f, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto x_0 è

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

Infatti tale retta ha pendenza $f'(x_0)$ e da una semplice verifica si può osservare che passa dal punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$.

La derivata $f'(x)$ di una funzione $f(x)$ rappresenta quindi la pendenza del grafico della funzione in corrispondenza del punto x. Se la funzione è lineare, cioè se

$$f(x) = mx + q$$

si verifica facilmente che $f'(x) = m$, cioè la pendenza è costante ed è pari al coefficiente angolare m. Infatti si ha:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h)+q-(mx+q)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m.$$

Utilizzando eventualmente alcuni limiti notevoli, si possono calcolare le derivate di tutte le funzioni elementari che abbiamo fin'ora introdotto. Le riassumiamo nella seguente tabella.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$mx+q$	m	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x	$\log\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg} x$	$1+\operatorname{tg}^2 x$	$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$

inoltre possiamo facilmente determinare la derivata della somma, del prodotto e della composizione di funzioni derivabili:

$$D(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x), \qquad D(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x),$$
$$D(f(g(x))) = f'(g(x))g'(x), \qquad D\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Capitolo 5

Lo studio di funzione

Il calcolo dei limiti e lo studio del segno della derivata ci danno importanti informazioni sull'andamento delle funzioni. Di particolare rilevanza è il seguente teorema.

Teorema 5.0.1 (criterio di monotonia)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua su $[a,b]$ e derivabile su $]a,b[$. Se per ogni $x \in]a,b[$ si ha $f'(x) > 0$ allora f è strettamente crescente su tutto l'intervallo $[a,b]$. Se per ogni $x \in]a,b[$ si ha $f'(x) < 0$ allora f è strettamente decrescente su tutto l'intervallo $[a,b]$.*

Abbiamo già osservato che le funzioni strettamente monotone sono anche iniettive. Di conseguenza quando f è strettamente monotona su un intervallo l'equazione

$$f(x) = y$$

non può avere più di una soluzione su tale intervallo. Il seguente importante teorema ci garantisce, sotto opportune ipotesi, che una tale equazione ha almeno una soluzione.

Teorema 5.0.2 (degli zeri)**.** *Sia $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e tale che $f(a)f(b) < 0$ (ossia il segno di $f(a)$ è opposto al segno di $f(b)$). Allora esiste almento un punto $x_0 \in [a,b]$ tale che $f(x_0) = 0$.*

Questi due risultati, presi assieme, sono degli utili strumenti per determinare il numero di soluzioni di una equazione.

Come esempio determiniamo ora il numero di soluzioni dell'equazione

$$4x^5 - 5x^4 + 3 = 0.$$

Consideriamo la funzione $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 3$. La derivata di tale funzione è

$$f'(x) = 20x^4 - 20x^3 = 20x^3(x-1).$$

In particolare osserviamo che $f'(x) > 0$ per $x > 1$ e per $x < 0$ mentre $f'(x) < 0$ per $x \in]0,2[$. Dunque la funzione f è strettamente crescente sugli intervalli $[1,+\infty[$ e $]-\infty,0]$ ed è strettamente decrescente sull'intervallo $[0,1]$. Osserviamo anche che $f(0) = 3$, $f(1) = 2$. Dunque per ogni $x > 1$, visto che f è crescente, si ha

$$x > 1 \implies f(x) > f(1) = 2 > 0$$

e per ogni $x \in]0,1[$, visto che f è decrescente si ha comunque

$$x < 1 \implies f(x) > f(1) = 2 > 0.$$

In questi due intervalli, dunque, non ci sono soluzioni della nostra equazione.

Nell'intervallo $x < 0$ sapendo che f è crescente possiamo solo dire che $f(x) < f(0) = 3$ ma questo non è ancora sufficiente a capire se abbiamo soluzioni in questo intervallo. Sicuramente visto che la funzione è monotona non ci può essere più di una soluzione.

Per verificare che effettivamente c'è una soluzione $x < 0$, sfruttiamo il teorema degli zeri. Osserviamo innanzitutto che

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^5 \left(4 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^5}\right) = -\infty.$$

Dunque, per definizione di limite, per ogni K fissato esisterà un numero M tale che per $x < M$ si ha $f(x) < K$. Scegliendo in particolare $K = 0$ possiamo affermare che esiste M per cui se $x < M$ allora $f(x) < 0$. In particolare posto $a = M - 1$ abbiamo $f(a) < 0$. Dunque sull'intervallo $[a, 0]$ si può applicare il teorema degli zeri in quanto la funzione f è continua e $f(a) < 0$ mentre $f(0) = 3 > 0$.

Possiamo quindi affermare con certezza che l'equazione presa in considerazione ha una unica soluzione.

5.1 Il metodo di bisezione

Nell'esempio precedente siamo riusciti a determinare il numero di soluzioni di una equazione. Ma come facciamo a determinare il valore numerico di tali soluzioni? Se l'equazione che stiamo studiando avesse una formula risolutiva, si potrebbe applicare tale formula per determinare le soluzioni. Ma sono numerosissimi i casi di equazioni che non hanno una formula risolutiva esplicita.

In questi casi possiamo adottare il *metodo di bisezione*. Sia $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Consideriamo allora il punto $x_1 = (a + b)/2$. Se $f(x_1) = 0$ abbiamo trovato una soluzione esatta. In caso contrario il segno di $f(x_1)$ sarà diverso da uno dei due punti a o b, visto che in questi due punti i segni sono opposti. Prendendo come nuovo intervallo $[a_1, b_1]$ uno dei due intervalli $[a, x_1]$ o $[x_1, b]$ in modo che $f(a_1)f(b_1) < 0$, si potrà procedere a ripetere il procedimento su questo nuovo intervallo di ampiezza metà (si è infatti proceduto a *bisecare* l'intervallo iniziale). Anche tal intervallo potrà essere ulteriormente diviso in due parti uguali tramite il punto medio $x_2 = (a_1 + b_1)/2$ e si procederà quindi su un nuovo intervallo $[a_2, b_2]$ di ampiezza un quarto dell'intervallo originale.

Così procedendo troviamo una sequenza di punti $a \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le b_2 \le b_1 \le b$ su cui si ha $f(a_k)f(b_k) < 0$. Ma le due successioni devono converge ad un certo valore $a_k \to x_0$, $b_k \to y_0$ e visto che $b_k - a_k \to 0$ si avrà $x_0 = y_0$. Inoltre essendo f continua si avrà $f(a_k)f(b_k) \to f(x_0)f(y_0) = f(x_0)^2 \ge 0$. Che insieme all'osservazione $f(a_k)f(b_k) < 0$ ci permettono di concludere $f(x_0) = 0$.

Capitolo 6

I numeri complessi

Come abbiamo fatto per i numeri reali possiamo definire assiomaticamente anche i numeri complessi. Diciamo che l'insieme $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è un insieme su cui sono definite le operazioni di *somma* e *prodotto* e che queste operazioni soddisfano le stesse proprietà algebriche che avevamo elencato per i numeri reali. Inoltre l'insieme dei numeri reali si identifica con un sottoinsieme dei numeri complessi: $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. In particolare 0 e 1 sono dei particolari numeri complessi. Ma i numeri complessi includono anche un particolare numero i chiamato *unità immaginaria* che soddisfa l'equazione

$$i^2 = -1$$

e che quindi non è un numero reale (in quanto nessun numero reale elevato al quadrato dà un numero negativo). Infine ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ può essere scritto nella forma

$$z = x + iy$$

dove x e y sono numeri reali univocamente determinati. Il numero reale x si chiama *parte reale* di z mentre il numero reale y si chiama *parte immaginaria* di z. I numeri che si rappresentano con $y = 0$ sono dunque i numeri reali. I numeri che si rappresentano con $x = 0$ si chiamano invece numeri *immaginari*. Si osservi che la parte immaginaria y di un numero complesso è un numero reale, mentre il numero iy è un numero immaginario. In particolare l'unità immaginaria i ha parte reale 0 e parte immaginaria 1 ed è quindi un numero immaginario.

Osserviamo che se i numeri reali possono essere rappresentati geometricamente da una retta (la retta reale, appunto) i numeri complessi possono essere identificati con le coppie (x, y) di numeri reali e quindi geometricamente sono rappresentati da un piano chiamato, appunto, *piano complesso*.

Dalle proprietà precedenti possiamo capire come svolgere le operazioni di somma e prodotto di numeri complessi. Per quanto riguarda la somma, utilizzando le proprietà commutativa, associativa e distributiva, si ha:

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = x_1 + x_2 + iy_1 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

dunque la somma di due numeri complessi si ottiene sommando separatamente parte reale e parte immaginaria. Per quanto riguarda il prodotto utilizzeremo anche la proprietà $i^2 = -1$, per ottenere

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2iy_1x_2 + x_1iy_2 + i^2y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).\end{aligned}$$

Prima di vedere come si effettua il rapporto tra numeri complessi, introduciamo due nuove operazioni. Il *modulo* di un numero complesso z si indica con $|z|$ ed è

definito da

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Osserviamo che se $y = 0$ allora $z = x$ è un numero reale e si ha $|z| = \sqrt{x^2} = |x|$ cioè il modulo di un numero reale non è altro che il valore assoluto, già introdotto nel primo capitolo. Osserviamo che il modulo di qualunque numero complesso è sempre un numero reale non negativo. Vale la seguente utile proprietà:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

Una nuova operazione che possiamo introdurre sui numeri complessi è il *coniugio*. Se $z = x + iy$ con x e y reali, definiamo:

$$\bar{z} = \overline{x + iy} = x - iy.$$

Diremo dunque che il coniugato di un numero complesso z è il numero complesso $\bar{z}$ ottenuto da z cambiando di segno la parte immaginaria. Sul piano complesso, l'operazione di coniugio corrisponde ad una simmetria rispetto all'asse delle x. Osserviamo che se $y = 0$ allora $\bar{z} = z$. Inoltre valgono le seguenti proprietà:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \qquad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}.$$

6.1 Rappresentazione polare dei numeri complessi

Un numero complesso $z = x + iy$ è rappresentato sul piano complesso dal punto di coordinate (x, y). Tale punto può anche essere scritto in *coordinate polari* cioè tramite la sua distanza ρ dall'origine e l'angolo θ rispetto all'asse delle x. In formule

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta, \\ y = \rho \sin\theta \end{cases}$$

ossia

$$z = x + iy = \rho(\cos\theta + i \sin\theta).$$

Osserviamo che $\rho = |z|$ infatti:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\rho^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \rho.$$

Calcolare θ a partire dalle coordinate (x, y) è più complicato. Osserviamo che si ha

$$\cos\theta + i \sin\theta = \frac{z}{\rho} = \frac{x}{\rho} + i\frac{y}{\rho}$$

da cui

$$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Queste relazioni permettono di calcolare θ a meno di un multiplo intero di 2π. L'angolo θ si chiama *argomento* del numero complesso z.

6.2 L'esponenziale complesso

In questa sezione definiamo la funzione esponenziale e^z. L'esponenziale dei numeri immaginari viene definito mediante la seguente relazione, chiamata *formula di Eulero*:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta.$$

Per definire l'esponenziale di un qualunque numero complesso $z = x+iy$ imponiamo che valga, come sui numeri reali, la proprietà:

$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

Si avrà dunque:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

L'esponenziale complesso ci permette quindi di semplificare la scrittura dei numeri complessi in forma polare. Infatti se ρ e θ sono modulo e argomento di un numero z, si ha

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta}.$$

I numeri complessi scritti in forma polare (o esponenziale) sono molto comodi quando si ha a che fare con il prodotto o con le potenze di un numero complesso. Infatti se z e w sono due numeri complessi, e se

$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad w = re^{it},$$

allora si ha

$$z \cdot w = \rho e^{i\theta} r e^{it} = \rho r e^{i(\theta+t)}.$$

Vediamo quindi che il prodotto zw di due numeri complessi z e w è un numero complesso che ha come modulo il prodotto dei moduli ρr e come argomento la somma degli argomenti $\theta + t$.

In particolare la potenza n-esima di z si scrive nel seguente modo:

$$z^n = \left(\rho e^{i\theta}\right)^n = \rho^n e^{in\theta}.$$

Come esempio risolviamo l'equazione complessa

$$z^n = c$$

dove n è un numero naturale e c è un numero complesso qualunque. Scriviamo sia z che c in coordinate polari:

$$z = \rho e^{i\theta}, \qquad c = re^{it}.$$

L'equazione $z^n = c$ diventa quindi

$$\rho^n e^{in\theta} = re^{it}$$

dove ora le incognite sono ρ e θ. Perché l'equazione sia valida, si deve avere:

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\theta = t + 2k\pi \end{cases}$$

dove k è un intero qualunque. Questo dipende dal fatto che due numeri complessi sono uguali se il loro argomento differisce per un multiplo di 2π. Dunque otteniamo:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \theta_k = \frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}. \end{cases}$$

Tutte le soluzioni dell'equazione $z^n = c$ hanno dunque lo stesso modulo $\rho = \sqrt[n]{|c|}$. Mentre per l'angolo abbiamo n possibili scelte:

$$\theta_0 = \frac{t}{n}, \theta_1 = \frac{t}{n} + \frac{2\pi}{n}, \theta_2 = \frac{t}{n} + \frac{4\pi}{n}, \ldots \theta_{n-1} = \frac{t}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}$$

e quindi le soluzioni:

$$z_0 = \rho e^{i\theta_0}, z_1 = \rho e^{i\theta_1}, \dots z_{n-1} = \rho e^{i\theta_{n-1}}.$$

Infatti osserviamo che $\theta_n = \theta_0 + 2\pi$ e quindi $z_n = z_0$ e in generale $z_{n+k} = z_k$. Quindi una volta identificate le prime n soluzioni $z_0, \dots, z_{n-1}$ le soluzioni con $k >= n$ e $k < 0$ si riconducono a queste prime n.

Possiamo quindi osservare come l'equazione $z^n = c$ ha n soluzioni distinte (se $c \neq 0$) che, sul piano complesso, sono i vertici di un n-agono regolare inscritto nella circonferenza di raggio ρ centrata nell'origine.

Capitolo 7

Funzioni di più variabili

7.1 Derivate parziali, gradiente, matrice hessiana

Una funzione $f\colon A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $n > 1$ viene detta *funzione di più variabili* in quanto ogni punto del dominio A viene identificato da n diverse componenti. In questo corso considereremo solamente il caso $n = 2$ e quindi funzioni di due variabili $f(x, y)$.

In questo capitolo ci porremo il problema di come determinare i punti di massimo e minimo per una funzione di più variabili. L'idea è quella di fissare una delle due variabili in modo tale da ricondursi alle proprietà delle funzioni di una sola variabile.

In particolare per una funzione di due variabili in ogni punto (x_0, y_0) possiamo definire due *derivate parziali* che si indicano con

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

e non sono altro che, rispettivamente, le derivate $h'(x_0)$ e $g'(y_0)$ delle due funzioni di una variabile $h(x) = f(x, y_0)$ e $g(y) = f(x_0, y)$. Le derivate parziali si calcolano quindi utilizzando le usuali regole delle derivate, osservando però che per quanto riguarda $\partial f/\partial x$ bisogna considerare x come variabile e y come un parametro fissato mentre nel calcolare $\partial f/\partial y$ bisogna considerare y variabile e x fissato. In particolare:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Ad esempio posto $f(x, y) = x^2 y - 2x \cos y$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2xy - 2\cos y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x^2 + 2x \sin y. \end{aligned}$$

Il simbolo ∇f rappresenta il *gradiente* di una funzione di più variabili e cioé il *vettore* che ha come componenti le derivate parziali. Nel caso di funzioni di due variabili si ha:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right).$$

Visto che le derivate parziali sono a loro volta funzioni di due variabili, possiamo fare le derivate parziali delle derivate parziali. Queste si chiamano derivate seconde

e si indicano come segue:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y}$$

.

Proseguendo con l'esempio della funzione $f(x, y) = x^2 y - x \cos y$ visto in precedenza, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(2xy - 2\cos y) = 2y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}(2xy - 2\cos y) = 2x + 2\sin y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + 2x\sin y) = 2x + 2\sin y \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + 2x\sin y) = 2x\cos y.
\end{aligned}$$

Come si può osservare in questo esempio, le due derivate *miste* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sono uguali tra loro. Questo è un fatto generale che prende il nome di *Teorema di Schwarz*: se f è una funzioni sufficientemente regolare, cambiando l'ordine delle derivate il risultato non cambia.

Con il simbolo $D^2 f$ si intende la *matrice hessiana* di f che è una *matrice* ovvero una tabella contenente tutte le derivate seconde. Nel caso delle funzioni di due variabili si ha:

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \end{pmatrix}.$$

7.2 Massimi e minimi per funzioni di due variabili

Se una funzione di due variabili $f(x, y)$ ha un massimo (o un minimo) in un punto (x_0, y_0), certamente le funzioni di una variabile $h(x) = f(x, y_0)$ e $g(y) = f(x_0, y)$ hanno anch'esse (a maggior ragione) un massimo (o un minimo) rispettivamente per $x = x_0$ e per $y = y_0$. Di conseguenza possiamo affermare che se (x_0, y_0) è un punto di massimo (o minimo) per una funzione di due variabili $f(x, y)$ allora entrambe le derivate parziali $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ si annullano nel punto (x_0, y_0).

In generale i punti (x, y) che soddisfano il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases}$$

si dicono *punti critici* della funzione f.

Non è detto che ogni punto critico sia massimo o minimo della funzione. In generale un punto critico può avere una delle seguenti *nature*: può essere un *massimo (relativo)*, un *minimo (relativo)* o un *punto sella*. Se nel punto (x_0, y_0) la funzione f ha un massimo relativo (o un minimo relativo) significa che in un certo raggio intorno a quel punto, i valori $f(x, y)$ della funzione non superano mai (o non sono

mai inferiori, nel caso del minimo) il valore $f(x_0, y_0)$ nel punto. Se il punto (x_0, y_0) è un punto sella significa che il punto non è né massimo né minimo e in particolare ci saranno alcune direzioni in cui la funzione $f(x, y)$ assume valori superiori al valore $f(x_0, y_0)$ e altre direzioni in cui assume valori inferiori.

La natura di un punto critico può essere determinata, nella maggior parte dei casi, esaminando la matrice hessiana in quel punto. Per esporre il criterio definiamo il concetto di *determinante* e *traccia* di una matrice con due righe e due colonne. Per la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definiamo $\det A$ (il determinante della matrice A) e $\operatorname{tr} A$ (la traccia della matrice A) con le seguenti formule:

$$\det A = ad - bc \qquad \operatorname{tr} A = a + d.$$

Criterio per determinare la natura di un punto critico. Sia $f(x, y)$ una funzione di due variabili e sia (x_0, y_0) un punto critico, cioè un punto in cui si annullanno entrambe le derivate parziali di f. Se $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0$ e $\operatorname{tr} D^2 f(x_0, y_0) > 0$ allora il punto (x_0, y_0) è un minimo relativo. Se $\det D^2 f(x_0, y_0) > 0$ e $\operatorname{tr} D^2 f(x_0, y_0) < 0$ allora (x_0, y_0) è un massimo relativo. Se $\det D^2 f(x_0, y_0 < 0$ allora (x_0, y_0) è un punto sella.

Il criterio precedente non si applica al caso in cui $\det D^2 f(x_0, y_0) = 0$. In tale caso non abbiamo informazioni sufficienti per determinare la natura del punto critico (x_0, y_0). Invece si può osservare che se $\det D^2 f > 0$ allora non può accadere che $\operatorname{tr} D^2 f = 0$.

Esempio. Consideriamo la funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 + x^2y^2 + 2x^2 - 2y^2.$$

Cerchiamo di determinare i punti critici e di determinarne la natura. Per determinare i punti critici dobbiamo innanzitutto calcolare le derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 + 2xy^2 + 4x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 2x^2y - 4y.$$

I punti critici sono i punti (x, y) che risolvono il seguente sistema:

$$\begin{cases} 4x^3 + 2xy^2 + 4x = 0 \\ 4y^3 + 2x^2y - 4y = 0. \end{cases}$$

Nella prima equazione possiamo raccogliere x ottenendo:

$$x(4x^2 + 2y^2 + 4) = 0$$

questa equazione è verificata solamente per $x = 0$ in quanto il fattore tra parentesi risulta essere sempre positivo. Dunque si ha $x = 0$ che sostituito nella seconda equazione del sistema ci dà:

$$4y^3 - 4y = 0.$$

Raccogliendo y in questa equazione abbiamo $4y(y^2 - 1) = 0$ che ha tre soluzioni $y_1 = 0$, $y_2 = 1$ e $y_3 = -1$. Nel complesso abbiamo quindi tre punti critici di coordinate:

$$(0, 0), \qquad (0, 1), \qquad (0, -1).$$

Per determinare la natura dei punti critici dobbiamo calcolare la matrice delle derivate seconde:

$$\begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 + 4 & 4xy \\ 4xy & 12y^2 + 2x^2 - 4. \end{pmatrix}$$

Dobbiamo quindi calcolarne il determinante e la traccia in ognuno dei punti critici. Nel punto $(0,0)$ la matrice hessiana risulta essere $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$. Il determinante di tale matrice è negativo quindi il punto $(0,0)$ risulta essere un punto sella. Nei punti $(0,\pm 1)$ la matrice hessiana risulta essere $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$. Tale matrice ha determinante positivo e traccia positiva dunque risulta che i due punti critici $(0,1)$ e $(0,-1)$ sono entrambi dei minimi relativi.

Capitolo 8

La formula di Taylor

8.1 Il polinomio di Taylor

Se f è una funzione derivabile almeno n volte in un punto x_0, possiamo definire il *polinomio di Taylor* di grado n associato ad f e centrato in x_0 nel modo seguente:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

dove con il simbolo $f^{(k)}$ si indica la k-esima derivata di f e con $k!$ (leggi: k fattoriale) si indica il prodotto dei primi k numeri naturali: $k! = k(k-1)(k-2)\dots 2 \cdot 1$. Per $k = 0$ adottiamo le convenzioni $f^{(0)} = f$, $0! = 1$, $(x - x_0)^0 = 1$.

Osserviamo che, facendo la derivata del polinomio di Taylor, si ottiene:

$$P_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} k(x - x_0)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

che è il polinomio di Taylor di f'. Visto che $P_n(x_0) = f(x_0)$ e che le derivate del polinomio di Taylor coincidono con il polinomio di Taylor delle derivate di f, deduciamo che nel punto x_0 le derivate di P_n coincidono con le derivate di f fino all'ordine n.

Per enunciare la formula di Taylor, introduciamo la nozione di "o-piccolo": diremo che una funzione $f(x)$ è "o-piccolo" di una funzione $g(x)$ per $x \to x_0$ e scriveremo

$$f(x) = o(g(x)) \qquad x \to x_0$$

se vale:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Ad esempio per $x \to 0$ possiamo scrivere:

$$x^3 = o(x^4), \qquad \frac{x}{\log x} = o(x)$$

in quanto si ha:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^4} = 0, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{\log x}}{x} = 0.$$

Possiamo ora enunciare la *formula di Taylor* la quale ci dice che il polinomio di Taylor di grado n approssima la funzione fino all'ordine n, nel senso che possiamo scrivere:

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0$$

che significa $f(x) - P_n(x) = o((x - x_0)^n)$ cioè:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

La formula di Taylor risulta essere uno strumento molto potente nel calcolo dei limiti. Infatti tramite la formula di Taylor possiamo sostituire una qualunque funzione con un polinomio, tenendo traccia dell'errore commesso. Risulterà utile, nel seguito, conoscere lo sviluppo di Taylor (cioè i coefficienti dei polinomi di Taylor) di tutte le funzioni elementari. Sarà sufficiente considerare il caso $x_0 = 0$, in quanto ogni limite per $x \to x_0$ si può ricondurre ad un limite per $x \to 0$ facendo un opportuno cambio di variabili (basterà sostituire x con $x_0 + x$).

Per determinare i coefficienti dei polinomi di Taylor di una funzione $f(x)$ è sufficiente calcolare il valore della funzione e delle derivate successive nel punto x_0. Ad esempio consideriamo la funzione $f(x) = \sin x$ e poniamo $x_0 = 0$. Avremo dunque:

$$f(x) = \sin x, \qquad f'(x) = \cos x, \qquad f''(x) = -\sin x, \qquad f'''(x) = -\cos x$$

in questo caso la derivata quarta di f coincide con la funzione stessa e quindi le derivate successive si ripetono. Possiamo comunque fermarci all'ordine $n = 4$ e scrivere:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{6}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{24}x^4 \\ &= 0 + x + 0 - \frac{x^3}{6} + 0 = x - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

La formula di Taylor ci dice quindi che per $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4).$$

Se avessimo scelto $n = 5$ avremmo ottenuto un termine in più nello sviluppo:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5).$$

Entrambi gli sviluppi che abbiamo scritto (all'ordine 4 e all'ordine 5) sono validi, anche se il secondo sviluppo contiene più informazioni.

In maniera analoga possiamo calcolare lo sviluppo di Taylor delle altre funzioni elementari, ottenendo la seguente tabella.

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\ \operatorname{tg} x &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5) \\ \operatorname{arctg} x &= x + \end{aligned}$$