Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

3 Febbraio 2011- **COMPITO 1**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nom	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (*a*) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\arctan n+3)}{6n^2+5n+1}$, (*b*) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2}}{x^2+3x+2} \log(1+x)$.

(a) $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}+3\right)$ (b) 0

Assegnata la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{3x}}{\log x - 1}$.

2. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti:

$\mathrm{Dom}(f) = (0,e) \cup (e, +\infty)$

Asintoti: $\lim_{x\to e^-} f(x) = -\infty$ As. vert.

$\lim_{x\to e^+} f(x) = +\infty$ As. vert.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ no asint. obl.

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

3. (5 punti) Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

$f'(x) = \frac{\log x - 3}{2\sqrt{x}(\log x - 1)^2}\sqrt{3} \Rightarrow$ minimo locale in $x = e^3$

4. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{e^{5x}-2}{e^{5x}+1}\, dx$.

$e^{5x} = t \qquad 5x = \log t \Rightarrow x = \frac{\log t}{5}$

$= \frac{1}{5}\int_1^e \frac{t-2}{t(t-1)} =$ razionali fratte $= \frac{1}{5}\left[3\log\left(\frac{1+e}{2}\right) - 2\right]$

5. (5 punti) Risolvere l'equazione differenziale $y' + \frac{1}{x}y - \frac{1}{2}\log x\, y^3 = 0$. Determinare la soluzione tale che $y(1) = 3$.

Bernoulli $z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = -2y^{-3}y' \Rightarrow z' = \frac{2}{x}z - \log x$

Slu $\Rightarrow$ $y(x) = \sqrt{\dfrac{1}{x\left(1 - \log x - \frac{8}{9}x\right)}}$

6. (4 punti) Da una classe formata da 20 femmine e 10 maschi vengono scelti a caso due alunni per partecipare ad una manifestazione; calcolare la probabilitá che siano dello stesso sesso.

$E = \{$I estr. maschio$\}$ $P(E) = \frac{1}{3}$ $P(F) = \{$II estrazione maschio$\}$.

$P(F/E) = \frac{P(E\cap F)}{P(E)} = 3P(E\cap F) \Rightarrow P(F/E) = \frac{9}{29} \Rightarrow P(E\cap F) = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{29} = \frac{3}{29}$

$E_1 = \{$I estr. femmina$\}$, $P(E_1) = \frac{2}{3}$ $P(F_1) = \{$II estrazione femm$\}$

$P(E_1 \cap F_1) = P(F_1/E_1)\cdot P(E_1) = \frac{2}{3}\frac{19}{29} = \frac{38}{87}$. Probl è $\frac{3}{29} + \frac{38}{87} = \frac{47}{87}$

7. (4 punti) In un gioco si lanciano di tre monete equilibrate e si assegna una vincita di un Euro se per ogni Testa uscita (e nessuna vincita per le Croci uscite). Sia Y la variabile aleatoria che assegna ad un lancio la vincita corrispondente. Calcolare il valore atteso di Y.

$\Omega = \{(a,b,c) \,/\, a,b,c \in \{T C\}\}$ $|\Omega| = 8$, Y può assumere valori

$y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$.

$p_0 = P\{Y_0 = 0\} = 1/8$, $p_1 = \frac{3}{8}$, $p_2 = \frac{3}{8}$, $p_3 = \frac{1}{8}$

$E(Y) = 0\cdot\frac{1}{8} + 1\cdot\frac{3}{8} + 2\cdot\frac{3}{8} + 3\cdot\frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

8. (8 punti) **Limiti di successioni e Teorema sull'unicitá del limite**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

3 Febbraio 2011- **COMPITO 2**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6n+2}{n^4+\sqrt{n}} \sin(n^2+1)$, (b) $\lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{\log(\log x)}{x-10}\right)$.

(a) 0 (b) 0

Assegnata la funzione $f(x) = \frac{1}{1-e^{\frac{x}{x^2+1}}}$.

2. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti:

$\mathrm{Def} f = \mathbb{R} - \{0\}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)+x=0$

$y=x$ asint. obbl.

$\lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \mp\infty$ As. vert.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x\to\infty} f(x)-x|=0$

As. obbl. $y=-x$ a $-\infty$

3. (5 punti) Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

$\nexists$ max o min ass.

$f' = -\frac{1}{[\ \ ]^2}\left(-e^{\frac{x}{x^2+1}}\right) \cdot \frac{x^2+1-x2x}{(x^2+1)^2}$

f' segno uguale a $1-x^2$

$x=1$ max loc.

$x=-1$ min. loc

4. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \sin(2x)\log(\sin x-5)dx$.

$= 2\int \mathrm{sen}\, x \cos x \log(\mathrm{sen}\, x - 5) = 2\int t \log(t-5)\,dt =$

$= t^2\log(t-5) - \int \frac{t^2}{t-5}\,dt = t^2\log(t-5) - \frac{t^2}{2} - 5t - 25\log(t-5) =$

$t = \mathrm{sen}\, x$ etc.

5. (5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + \alpha y = 0$, al variare del parametro α.

$\alpha < 1 \quad y(x) = C_1 e^{(1+\sqrt{1-\alpha})x} + C_2 e^{(1-\sqrt{1-\alpha})x}$

$\alpha = 1 \quad y(x) = (C_1 + C_2 x)e^x$

$\alpha > 1 \quad y(x) = e^x (C_1 \cos\sqrt{\alpha-1}\, x + C_2 \operatorname{sen}\sqrt{\alpha-1}\, x)$

6. (4 punti) Da una classe formata da 15 femmine e 15 maschi vengono scelti a caso due alunni per partecipare ad una manifestazione; calcolare la probabilitá che siano dello stesso sesso.

$\frac{14}{29}$

7. (4 punti) In un gioco il giocatore lancia tre monete equilibrate e vince tre Euro se su tutte e tre le monete esce Croce, oppure se su tutte e tre esce Testa, mentre perde due Euro in tutti gli altri casi. Calcolare il valore atteso della variabile aleatoria che associa ad un lancio delle tre monete la vincita corrispondente.

$-\frac{3}{4}$

8. (8 punti) **Teorema di Lagrange e caratterizzazione delle primitive**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

3 Febbraio 2011- **COMPITO 3**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+8n-1}{n^2 \arctan n}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(\log^3 x+1)}{(5\log^3 x+3)(1-\cos x)}$.

(a) $\frac{6}{\pi}$ (b) $\frac{2}{5}$

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int \frac{\tan x - 2}{\cos^2 x(\tan^2 x + \tan x)} \, dx$.

$t = \operatorname{tg} x \Rightarrow dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$= \dots = \frac{1}{2} \log|t^2+t| - \frac{5}{2} \log\left(\frac{|t|}{|1+t|}\right) + C.$

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{\log x - 1}{\sqrt{x}} + 2x$.

Def. $(0, +\infty)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$

AV in 0^+

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = 0$

AObb. $y = 2x$

4. (5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \frac{e^x+9}{\sqrt{e^x+4}}$.

Def. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow$ no max as.

$f'(x) = \frac{e^{2x} - e^x}{[\ \ ]^{\frac{3}{2}}}$

$f' < 0$ $x \in (-\infty, 0)$

$f' > 0$ $x \in (0, +\infty)$

$x = 0$ min assoluto

5. (5 punti) Determinare la soluzione dell'equazione differenziale $y' + \frac{1}{2}\, y\, \cos x + x\, e^{\sin x}\, y^3 = 0$, tale che $y(0) = 2$.

Bernoulli $z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = -\frac{2y'}{y^3}$ etc.

$\Rightarrow$ sol $y(x) = \sqrt{\frac{-1}{x^2+c}\, e^{-\frac{\operatorname{sen} x}{2}}}$ $\quad y(0) = 2 \Rightarrow y(x) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}} - x^2}\, e^{-\frac{\operatorname{sen} x}{2}}}$

6. (4 punti) Da un sacchetto contenente 90 palline numerate da 1 a 90 vengono estratte, senza reinserimento, due palline. Calcolare la probabilitá che i numeri sulle due palline estratte siano entrambi pari.

$\frac{22}{89}$

7. (4 punti) Si lanciano tre dadi equilibrati con facce numerate da 1 a 6. Sia Y la variabile aleatoria che conta su quanti dei tre dadi é uscito un multiplo di tre (cioé 3 oppure 6). Calcolare il valore atteso di Y.

1

8. (8 punti) **Teorema della media integrale e Teorema Fondamentale del calcolo Integrale**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

3 Febbraio 2011- **COMPITO 4**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos(n^2)(3n^3+\sqrt{n})}{n^4+2n+1}$ (b) $\lim_{x\to+\infty} \arctan^3\left(\frac{x^4+1}{x^3\log x}\right)$.

(a) 0 (b) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^3$

Assegnata la funzione $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x-4}{x^2+9}}-1}$.

2. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti:

Dom $\mathbb{R}-\{4\}$

$\lim_{x\to 4^{\pm}} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

AV. in 4^+ AO in $\pm\infty$ $y = x+4$

AV in 4^-

3. (5 punti) Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

no max/min assoluti

$f'(x) = -\frac{1}{[\quad]^2} e^{\frac{x-4}{x^2+9}} \frac{x^2+9-(x-4)2x}{(x^2+9)^2} \Rightarrow$ segno x^2-8x+9

zeri $\{-1, 9\}$ max loc -1 e min loc 9

4. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int \frac{2\sin x \log(\tan x-4)}{\cos^3 x}\, dx$.

$\operatorname{tg} x = t \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x}dx = dt \Rightarrow$ etc. $\int 2t\log(t-4) = \dots$

$= t^2\log|t-4| + \frac{t^2}{2} + 4t + 16\log|t-4| + c$.

5. (5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - 2\alpha y' + 4y = 0$, al variare del parametro α.

$|\alpha| > 2 \Rightarrow y(x) = c_1 e^{(\alpha + \sqrt{\alpha^2-4})x} + c_2 e^{(\alpha - \sqrt{\alpha^2-4})x}$

$|\alpha| = 2 \Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\alpha x}$

$|\alpha| < 2 \Rightarrow y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\sqrt{4-\alpha^2}\, x) + c_2 \operatorname{sen}(\sqrt{4-\alpha^2}\, x))$

6. (4 punti) Da un sacchetto contenente 90 palline vengono estratte, senza reinserimento, due palline. Calcolare la probabilitá che i numeri sulle due palline estratte siano entrambi divisibili per tre.

$\frac{29}{267}$

7. (4 punti) Si lanciano tre dadi equilibrati con facce numerate da 1 a 6. Sia Y la variabile aleatoria che conta su quanti dei tre dadi é uscito un numero pari. Calcolare il valore atteso di Y.

$3/2$

8. (8 punti) **Teorema di Rolle e Lagrange**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

3 Febbraio 2011- **COMPITO 5**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2(1+\arctan n)}{5n^2++7n+1}$ (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(3x^2+1)}{2x\sin x}$.

(a) $\frac{1}{5}\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$ (b) $\frac{3}{2}$.

Assegnata la funzione $f(x) = \frac{x}{x-2} + \log(x-1)$.

2. (5 punti) Determinare l'insieme di definizione e gli asintoti:

$Dom(f) = (1, 2) \cup (2, +\infty)$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$ As. vert.

$\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = \pm\infty$ As. v.

$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\underline{\underline{\text{no}}}$ asint. obl.

3. (5 punti) Determinarne gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti.

no max o min. ass.

$f'(x) = \frac{x^2-4x+6}{\underbrace{(x-2)^2(x-1)}_{\geq 0}}$

max loc $x = 3-\sqrt{3} \in (1,2)$

min loc $x = 3+\sqrt{3} \in (2,+\infty)$

4. (5 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito: $\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{2}{x}}-3}{x^2(e^{\frac{2}{x}}+1)}\, dx$

$e^{\frac{2}{x}} = t \Rightarrow \frac{2}{x} = \log t \Rightarrow -\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{2t}dt$

$= \frac{1}{2}\int_{e^{-2}}^{e^{-4}} \frac{t-3}{(t+1)t}dt = \ldots = 2\log(t+1) - \frac{3}{2}\log t$

5. (5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y' + \frac{3}{2}x^2 y + e^{x^3} \log(x^2+1)\, y^3 = 0$, tale che $y(0) = \frac{1}{2}$.

Bernulli : $z = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = -\frac{2y'}{y^3} = \ldots$

$$y(x) = \sqrt{\frac{1}{k + 2x\log(x^2+1) - 4x + 8\,\mathrm{arctg}\,x + c}\, e^{+\frac{x^3}{2}}}$$

6. (4 punti)Un'urna contiene trenta palline, di cui dieci gialle, dieci rosse e dieci blu. Vengono estratte dall'urna due palline, senza reinserimento. Calcolare la probabilitá che le due palline estratte abbiano lo stesso colore.

$\frac{9}{29}$

7. (4 punti) Si lanciano due dadi equilibrati, ciascuno con quattro facce numerate da uno a quattro. Sia Y la variabile aleatoria che associa a ciascun lancio la somma delle due facce uscite. Calcolare il valore atteso di Y.

5

8. (8 punti) **Criterio di monotonia: condizioni necessarie esufficienti per la crescenza di una funzione derivabile**

Matematica, 12 CFU, Corso di laurea in Scienze Biologiche- A.A. 2010-2011-Corso A

3 Febbraio 2011- **COMPITO 6**- Totale punti 40, punteggio minimo 24

Nome	Cognome

1. (4 punti) Calcolare i seguenti limiti: (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n^3+5n+2)\cos(n+1)}{3n^5+\sqrt{n}}$, (b) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+3x+2)\,\sin x}{x\,e^{-x^2}}$.

(a) 0 (b) 2

2. (5 punti) Calcolare il seguente integrale definito: $\int 2\sin 2x\,\log(\cos x - 4)\quad dx$.

$\cos x = t \quad = \dots \quad = -2t^2 \log|t-4| + t^2 + 8t + 32\log(t-4) + c.$

3. (5 punti) Determinare gli asintoti della funzione: $f(x) = \frac{x\log x + 2x}{2-\log x}$.

$(0,e^2)\cup(e^2,+\infty)$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$\lim_{x\to (e^2)^{\pm}} f(x) = \frac{z^0}{0^{\mp}} = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \end{cases}$ As. verticale

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = -\infty$

NO Asint. obbl.

4. (5 punti) Determinare gli eventuali massimi e minimi relativi ed assoluti della funzione: $f(x) = \frac{e^{2x}+3}{\sqrt{e^{2x}+1}}$.

Dom $f = \mathbb{R}$.

$\lim_{x\to+\infty} f = +\infty \Rightarrow$ no max ass.

$\lim_{x\to-\infty} f = 3$,

$f'(x) = \frac{e^{4x} - e^{2x}}{(\sqrt{e^{2x}+1})^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \qquad x = 0$ min. ass.

non ci sono min e max locali

5. (5 punti) Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale $y'' - 2y' + 3\alpha y = 0$, al variare del parametro α.

$\alpha < \frac{1}{3} \Rightarrow y(x) = c_1 e^{(1+\sqrt{1-3\alpha})x} + c_2 e^{(1-\sqrt{1-3\alpha})x}$

$\alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x$

$\alpha > \frac{1}{3} \Rightarrow y(x) = e^x (c_1 \cos\sqrt{3\alpha-1}\,x + c_2 \operatorname{sen}\sqrt{3\alpha-1}\,x)$

6. (4 punti) Un'urna contiene quaranta palline, di cui trenta gialle e dieci rosse. Vengono estratte dall'urna due palline, senza reinserimento. Calcolare la probabilitá che le due palline estratte abbiano lo stesso colore.

$8/13$

7. (4 punti) Si lanciano due dadi equilibrati a sei facce, numerate da uno a sei. Sia Y la variabile aleatoria che associa a ciascun lancio il valore assoluto della differenza delle facce uscite. Calcolare il valore atteso di Y.

$35/18$

8. (8 punti) **Minimi e massimi relativi. Teorema di Fermat e Teorema di Rolle**