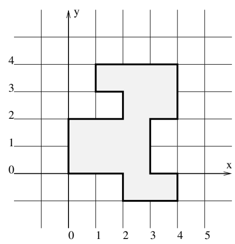
Analisi Matematica 2 e Complementi
Soluzioni prova scritta n. 3

Corso di studio in Ingegneria Chimica, Elettrica ed Energetica
a.a. 2009-2010

17 luglio 2010

1. Trovare i valori massimo e minimo assunti dalla funzione

$$f(x,y) = x^2y - x$$



sulla regione rappresentata in figura.

Soluzione. Le derivate parziali della funzione f sono:

$$f_x = 2xy - 1$$
$$f_y = x^2.$$

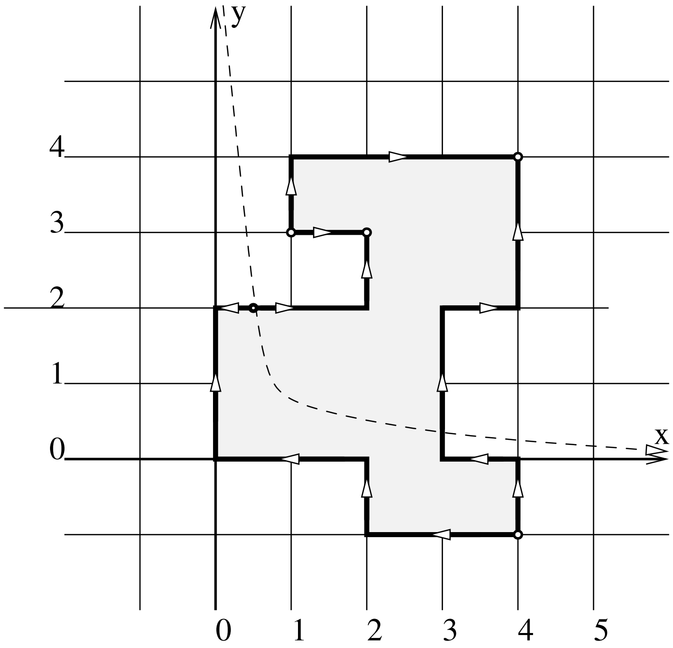
Le due derivate non si annullano mai contemporaneamente e quindi non ci sono punti critici all'interno del dominio. Il massimo e il minimo della funzione, che sicuramente esistono per il teorema di Weierstrass, si trovano quindi tutti sulla frontiera.

Osserviamo che sui tratti verticali della frontiera, l'andamento della funzione è dato dal segno della derivata f_y. In particolare visto che $f_y \geq 0$ ovunque, in tutti i tratti verticali la funzione cresce al crescere di y.

Sui tratti orizzontali, invece, l'andamento della funzione è dato dal segno della derivata f_x. Tale derivata si annulla sull'iperbole $xy = 1/2$ che interseca i tratti orizzontali solo nel punto $(1/4, 2)$. Al di sopra dell'iperbole la funzione cresce al crescere di x, sotto l'iperbole invece la funzione cresce al diminuire di x.

Complessivamente l'andamento della funzione sulla frontiera è quello rappresentato nella figura alla pagina seguente.

Si vede in particolare che i punti in cui c'è una inversione delle frecce sono i punti di coordinate $(4,4)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(1/4,2)$ e $(4,-1)$. Questi sono i candidati massimi/minimi e possiamo escludere tutti gli altri punti dalla nostra ricerca.



Si ha

$$f(4,4) = 60, \qquad f(1,3) = 2, \qquad f(2,3) = 10,$$
$$f(1/4,2) = -1/4, \qquad f(4,-1) = -20.$$

Possiamo quindi concludere che il valore massimo è 60 e il minimo è -20.

2. Disegnare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^3 - 2xy^2 \\ y(2) = 2 \end{cases}$$

In particolare

(a) dimostrare che $y(x)$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$, e determinare

$$\lim_{x\to\pm\infty} y(x).$$

(b) Dimostrare che

$$\int_0^{+\infty} y(x)\, dx < +\infty.$$

Soluzione. Si ha $y' = y^2(y - 2x)$. Dunque $y' = 0$ sulla retta $y = 0$ e sulla retta $y = 2x$. Vediamo dunque che $y = 0$ è una soluzione dell'equazione e visto che vale il teorema di esistenza e unicità, la soluzione del problema di

Cauchy non potrà mai toccare tale soluzione e quindi dovrà essere sempre positiva (essendo $y(2) = 2 > 0$.

La nostra soluzione passa dal punto $(2, 2)$, che si trova al di sotto della retta $y = 2x$ e quindi intorno a tale punto la soluzione sarà decrescente. Essendo inferiormente limitata ($y > 0$) la soluzione dovrà essere definita per ogni $x > 2$ e dovrà avere un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Per $x < 2$, al decrescere di x la soluzione dovrà necessariamente incontrare e attraversare la retta $y = 2x$. Nel punto di intersezione la funzione avrà un massimo e poi sarà una funzione crescente (ovvero dovrà decrescere al decrescere di x). Di nuovo, essendo inferiormente limitata, sarà definita per ogni $x < 2$ e ci dovrà essere un asintoto orizzontale anche per $x \to -\infty$.

Sia ora $\ell = \lim_{x\to+\infty} y(x)$. Se fosse $\ell \neq 0$ si avrebbe $y'(x) = y^2(x)(y(x) - 2x) \to -\infty$ per $x \to +\infty$. Questo è assurdo (essendoci l'asintoto orizzontale) e quindi deduciamo che $\ell = 0$. Lo stesso ragionamento si ripete per $x \to -\infty$.

Per quanto riguarda il punto (b) dobbiamo dimostrare che $y(x)$ è più piccola di una funzione sommabile. Per far questo osserviamo che sicuramente $y(x) < x$ per $x > 2$ (essendo $y(x)$ decrescente e $y(2) = 2$). Dunque si ha

$$y' = y^2(y - 2x) < y^2(-x) = -xy^2.$$

Per il teorema di confronto possiamo affermare che la soluzione $y(x) \leq z(x)$ se $z(x)$ è una soluzione di

$$\begin{cases} z' = -xz^2, \\ z(2) = 2. \end{cases}$$

Ma l'equazione $z' = -xz^2$ è a variabili separabili e quindi la possiamo facilmente risolvere, trovando

$$z(x) = \frac{2}{x^2 - 3}.$$

Ora osserviamo che si ha

$$\int_2^{+\infty} z(x)\, dx < +\infty$$

ed essendo $y(x) < z(x)$ per $x > 2$ si ha anche

$$\int_0^{+\infty} y(x)\, dx < +\infty.$$

3. Calcolare
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\, dx.$$

Soluzione. Poniamo
$$f(z) = \frac{1}{1+z^6}.$$
La funzione $f(z)$ è olomorfa sul piano complesso privato dei 6 punti in cui $z^6 = -1$. Questi sei punti si trovano sulla circonferenza unitaria $|z| = 1$ ai vertici di un esagono regolare: $z_k = e^{\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}}$ con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Se consideriamo la curva γ_R formata dal segmento $[-R, R]$ e dalla semicirconferenza avente diametro lo stesso segmento e giacente nel semipiano dei punti con parte immaginaria positiva, osserviamo che per $R > 1$ tale semicirconferenza circonda i tre poli z_0, z_1, z_2 e l'integrale di $f(z)$ su γ_R non dipende da R. Inoltre applicando anche il teorema del grande cerchio (valido essendo $zf(z) \to 0$ per $z \to \infty$) si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^6}\, dx &= \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\, dz \\
&= \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \\
&= 2\pi i(\mathrm{Res}(f, z_0) + \mathrm{Res}(f, z_1) + \mathrm{Res}(f, z_2))
\end{aligned}$$

Non ci resta quindi che calcolare i residui nei tre punti

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i}, z_1 = i, z_2 = e^{\frac{5}{6}\pi i}.$$

Essendo tutti i poli di ordine 1, si ha

$$\mathrm{Res}(f, z_k) = \left.\frac{1}{(1+z^6)'}\right|_{z=z_k} = \frac{1}{6z_k^5}.$$

In particolare

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f, i) &= \frac{1}{6i^5} = \frac{1}{6i}, \\
\mathrm{Res}(f, e^{\frac{\pi}{6}i}) &= \frac{1}{6}e^{-\frac{5}{6}\pi i} = \frac{1}{6}(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}) \\
\mathrm{Res}(f, e^{\frac{5}{6}\pi i}) &= \frac{1}{6}e^{-\frac{25}{6}\pi i} = \frac{1}{6}(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2})
\end{aligned}$$

da cui

$$2\pi i \sum_{k=0}^{2} \mathrm{Res}(f, z_k) = 2\pi i \left(\frac{1}{6i} - \frac{i}{6}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

4. Trovare la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{per } t \in [0,1] \\ 2-t & \text{per } t \in (1,2] \\ 0 & \text{per } t \in (2,+\infty) \end{cases}$$

Soluzione. Possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(t) &= t\chi_{[0,1]} + (2-t)\chi_{(1,2]} \\ &= t - t\chi_{(1,+\infty)} + (2-t)\chi_{(1,+\infty)} - (2-t)\chi_{(2,+\infty)} \end{aligned}$$

e quindi ricordando la formula

$$Ł[f(t)\chi_{(t_0,+\infty)}](s) = e^{-t_0 s}Ł[f(t_0+t)](s)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} Ł[f] &= Ł[t] - e^{-s}Ł[t+1] + e^{-s}Ł[2-(t+1)] - e^{-2s}Ł[2-(t+2)] \\ &= \frac{1}{s^2} - e^{-s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s}\right) + e^{-s}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^2}\right) + e^{-2s}\frac{1}{s^2} \\ &= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2} = \frac{(1-e^{-s})^2}{s^2} \end{aligned}$$