Analisi Matematica 2
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

12 gennaio 2010

1. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3 + y^5}{x^4 + y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione nel punto $(0,0)$.

Soluzione. Ricordando la disuguaglianza

$$2ab \leq a^2 + b^2$$

(che si ottiene da $0 \leq (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$) osserviamo che si ha

$$(x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \leq x^4 + y^4 + x^4 + y^4 = 2(x^4 + y^4)$$

Utilizzando anche le disuguaglianze

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

otteniamo

$$|f(x,y)| \leq \frac{2(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{(x^2+y^2)^2}{2}} = 4\sqrt{x^2 + y^2} \to 0, \quad \text{per } (x,y) \to 0.$$

Dunque la funzione è continua nel punto $(0,0)$.

Per quanto riguarda le derivate parziali notiamo che $f(x,0) = 0$ e dunque $f_x(0,0) = 0$. Invece

$$f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1.$$

Dunque la funzione è derivabile in $(0,0)$.

Per la differenziabilità dobbiamo verificare che la seguente funzione abbia limite nullo per $(x,y) \to (0,0)$:

$$g(x,y) = \frac{f(x,y) - f(0,0) - xf_x(0,0) - yf_y(0,0)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{x^2y^3+y^5}{x^4+y^4} - y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Valutiamo la funzione g sulle rette $y = mx$:

$$g(x, mx) = \frac{\frac{m^3x^5+m^5x^5}{x^4+m^4x^4} - mx}{\sqrt{x^2 + m^2x^2}} = \frac{\frac{m^3+m^5}{1+m^4} - m}{\sqrt{1 + m^2}}$$

che è diverso da zero se, ad esempio, scegliamo $m = 2$.

Dunque la funzione è continua, derivabile ma non differenziabile nel punto $(0,0)$.

Soluzione alternativa. Per quanto riguarda la continuità della funzione f, si poteva procedere anche nel seguente modo. Si osserva che

$$|x| \le \sqrt[4]{x^4 + y^4}, \quad |y| \le \sqrt[4]{x^4 + y^4}$$

da cui si ricava

$$|f(x,y)| \le \frac{2(x^4 + y^4)^{\frac{5}{4}}}{x^4 + y^4} = \sqrt[4]{x^4 + y^4} \to 0.$$

2. Trovare i punti critici della funzione

$$f(x,y) = x^6 - 2x^3y^3 + y^4 - y^6$$

e dire se sono massimi o minimi.

Soluzione. Calcoliamo innanzitutto le derivate parziali:

$$\begin{aligned} f_x &= 6x^5 - 6x^2y^3 = 6x^2(x^3 - y^3) \\ f_y &= -6x^3y^2 + 4y^3 - 6y^5 \end{aligned}$$

I punti critici sono i punti in cui si annullanno contemporaneamente f_x e f_y. Perché si annulli f_x deve essere $x = 0$ oppure $x = y$. Se $x = 0$ si trova $f_y = 4y^3 - 6y^5 = 2y^3(2 - 3y^2)$ che si annulla per $y = 0$ oppure $y = \pm\sqrt{2/3}$. Dunque troviamo i tre punti critici

$$p_1 = (0,0), \qquad p_2 = (0, \sqrt{2/3}), \qquad p_3 = (0, -\sqrt{2/3}).$$

Se $x = y$ si trova $f_y = -6x^5 + 4x^3 - 6x^5 = 4x^3(1 - 3x^2)$ che si annulla per $x = 0$ oppure $x = \pm 1/\sqrt{3}$. Oltre alla soluzione $(0,0)$ che abbiamo già trovato, abbiamo dunque altri due punti critici:

$$p_4 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), \qquad p_5 = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}).$$

Calcoliamo ora le derivate seconde:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 30x^4 - 12xy^3 \\ f_{xy} &= -18x^2y^2 \\ f_{yy} &= -12x^3y + 12y^2 - 30y^4. \end{aligned}$$

Se $x = 0$ si ha $f_{xx} = 0$, $f_{xy} = 0$ e dunque i punti p_1, p_2 e p_3 hanno determinante hessiano nullo. Se $x = y$ si ha $f_{xx} = 18x^4$, $f_{xy} = -18x^4$, $f_{yy} = -42x^4 + 12x^2$ e dunque il determinante hessiano risulta

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = -42 \cdot 18x^8 + 18 \cdot 12x^6 - 18^2x^8 = 18x^6(12 - 60x^2)$$

che per $x^2 = 1/3$ risulta essere una quantità negativa. Dunque i punti p_4 e p_5 sono punti a sella.

Studiamo con maggiore dettaglio i punti con hessiano nullo. Dal segno della derivata parziale f_x osserviamo che fissato $\bar{y}$ la funzione $x \mapsto f(x,\bar{y})$ ha derivata positiva per $x > \bar{y}$ e negativa per $x < \bar{y}$ e $x \neq 0$. Dunque la funzione $f(x,\bar{y})$, al variare di x, assume valore minimo per $x = \bar{y}$. Questo significa che $f(x,y) \ge f(y,y)$ per ogni x e y.

Studiamo ora cosa succede sulla curva $y = x$. Posto $g(x) = f(x,x) = x^6 - 2x^6 + x^4 - x^6 = x^4 - 2x^6 = x^4(1 - 2x^2)$ abbiamo che $g(x) \geq 0$ se $|x| \leq 1/\sqrt{2}$ e di conseguenza $g(x) \geq g(0) = 0$ per tali valori di x.

Vogliamo ora mostrare che il punto $(0,0)$ è un minimo locale. Preso infatti un qualunque punto (x,y) con $x, y \in [-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$ abbiamo dimostrato che si ha $f(x,y) \geq f(y,y) = g(y) \geq g(0) = f(0,0)$.

Vediamo cosa succede nei punti $p_2 = (0, \sqrt{2/3})$ e $p_3 = -p_2$. Dal segno di f_x possiamo affermare che sulla retta $y = \sqrt{2/3}$ la funzione f è strettamente decrescente in un intorno di $x = 0$. Questo significa che il punto p_2 non può essere né massimo né minimo. Discorso analogo si può fare nel punto p_3.

In conclusione: il punto p_1 è un minimo relativo, i punti p_2 e p_3 sono punti di sella e i punti p_4 e p_5 non sono né massimi né minimi.

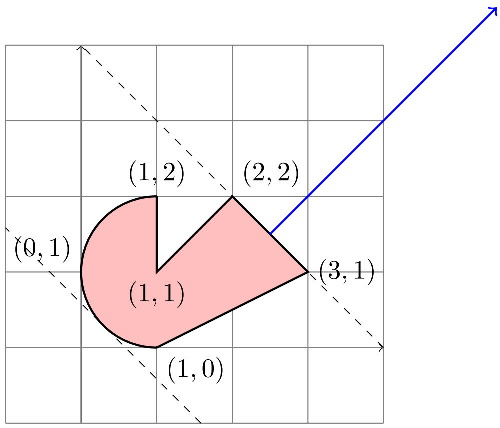


Figura 1: La figura relativa all'esercizio 3. La lunga freccia rappresenta il vettore gradiente. Le linee tratteggiate sono le rette perpendicolari al gradiente (curve di livello di f) dove vengono assunti il massimo e il minimo

3. Determinare il valore massimo e minimo assunti dalla funzione

$$f(x,y) = 3x + 3y + 2$$

sulla regione chiusa delimitata da 4 segmenti e una semicirconferenza rappresentata in figura.

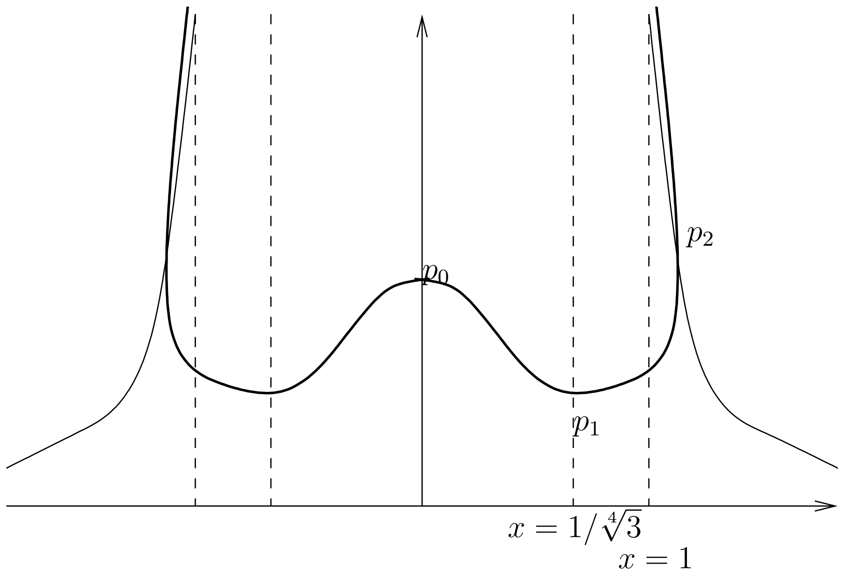
Soluzione. La funzione da minimizzare è lineare con gradiente $(3,3)$. Gli insiemi di livello saranno dunque le rette perpendicolari al gradiente, ovvero le rette con coefficiente angolare -1. L'intero insieme è compreso tra la rette $x+y = 4$, passante dai punti $(2,2)$ e $(3,1)$ dove la funzione f ha valore costante 14 e la retta $x + y = 2 - \sqrt{2}$, tangente alla semicirconferenza, dove la funzione ha valore $8 - 3\sqrt{2}$. Nella striscia compresa tra le due rette la funzione assume i valori intermedi, e dunque questi valori sono il massimo e il minimo valore assunto da f sull'insieme dato.

4. Disegnare approssimativamente l'insieme di livello $\{f(x,y) = 0\}$ della funzione

$$f(x,y) = x^6 y - x^2 y - \log y.$$

In particolare

(a) determinare i punti in cui l'insieme di livello non si può rappresentare localmente come il grafico di una funzione (rispetto a x o rispetto a y);



(b) dimostrare che il livello è simmetrico rispetto all'asse delle y;

(c) trovare gli asintoti verticali del livello.

(d) verificare che il livello è connesso;

Soluzione. Notiamo innanzitutto che la funzione f è definita solo nel semipiano $y > 0$. Calcoliamo le derivate parziali

$$\begin{aligned} f_x &= 6x^5y - 2xy = 2xy(3x^4 - 1) \\ f_y &= x^6 - x^2 - \frac{1}{y} \end{aligned}$$

e studiamone il segno. La derivata f_x si annulla sulle rette $x = 0$ e $x = \pm 1/\sqrt[4]{3}$, è positiva per $x \to \infty$ e cambia segno ogni volta che si attraversa una di queste rette. La derivata f_y è positiva quando

$$\frac{1}{y} \leq x^6 - x^2$$

ovvero quando

$$y \geq \frac{1}{x^6 - x^2} = \frac{1}{x^2(x^4 - 1)}.$$

Con un rapido studio di funzione si vede che la curva in cui si annulla f_y (con $y > 0$) è formata da due rami asintotici a $y = 0$ e alle rette $x = \pm 1$.

Osserviamo ora che non ci sono punti in cui si annullano contemporaneamente entrambe le derivate parziali. Dunque in tutti i punti del semipiano $y > 0$ sono soddisfatte le ipotesi del teorema del Dini e quindi gli insiemi di livello si possono rappresentare in ogni punto come grafico di funzione rispetto alla variabile x o alla variabile y.

Visto che la funzione f è simmetrica rispetto all'asse delle y, in quanto $f(x, y) = f(-x, y)$, anche gli insiemi di livello hanno la stessa simmetria.

Prendiamo ora il punto $p_0 = (0, 1)$ sull'asse delle y dove $f(p_0) = 0$ e ricostruiamo l'insieme di livello passante per questo punto. Per la simmetria appena evidenziata sarà sufficiente determinare il comportamento per $x \geq 0$. Nel punto p_0 si annulla f_x dunque in tale punto l'insieme di livello ha tangente orizzontale. Spostandosi verso destra la curva di livello è decrescente in quanto $f_x < 0$, $f_y < 0$ da cui $dy/dx = -f_x/f_y < 0$.

Osserviamo ora che nessuna curva di livello può raggiungere l'asse delle x. Infatti se $y \to 0^+$ e x è limitato, la funzione f tende a $+\infty$. Dunque la nostra curva di livello dovrà necessariamente incontrare la retta $x = 1/\sqrt[4]{3}$ in un punto p_1. Tale punto risulta essere un minimo, in base al segno di f_x. La curva di livello dunque diventa crescente, passato p_1.

Notiamo ora che non è possibile che ci si presenti un asintoto verticale $x = \bar{x}$ a meno che non sia $\bar{x} = 1$. Infatti notiamo che

$$f(x,y) = (x^6 - x^2 - \frac{\log y}{y})y$$

e se $x \to \bar{x}$ e $y \to +\infty$ il fattore $(x^6 - x^2 - \frac{\log y}{y}$ tende a $\bar{x}^6 - \bar{x}^2$ e quindi se $\bar{x}^6 - \bar{x}^2 \neq 0$ la funzione tende a $\pm\infty$. Questo significa che se $\bar{x} \neq 0$ e $\bar{x} \neq \pm 1$ l'insieme di livello non può avere l'asintoto verticale $x = \bar{x}$.

Di conseguenza la nostra curva di livello prosegue crescendo almeno fino a superare la retta $x = 1$. A questo punto necessariamente deve incontrare la curva decrescente in cui $f_y = 0$ in un punto p_2. In tale punto la curva di livello ha tangente verticale e quindi ritorna indietro: la coordinata x cala mentre la y cresce. Visto che non è possibile che la curva di livello incontri nuovamente la curva $f_y = 0$ (che può essere attraversata solo in un verso) dovrà necessariamente avere una asintoto verticale. E l'unica possibilità, per quanto visto in precedenza è che l'asintoto sia la retta $x = 1$.

Questo conclude l'andamento della curva di livello uscente dal punto p_0. Non ci possono essere altri rami della curva di livello 0, in quanto per x compreso tra 0 e 1, il segno della derivata f_y ci dice che la funzione è strettamente crescente sulle rette verticali e quindi assume ogni valore una unica volta. Per $x > 1$, invece, la funzione, sulle rette verticali, ha un andamento prima decrescente e poi crescente. Dunque potrà avere al massimo due intersezioni con le rette verticali. Questo infatti è quello che avviene fino all'ascissa del punto p_2. Da quel punto in poi la funzione risulta essere sempre positiva, come si può dedurre utilizzando la monotonia di f sulla curva $f_y = 0$ e sulle rette orizzontali.

Possiamo quindi concludere che l'insieme di livello non ha altri rami, ed è quindi connesso.