

Analisi Matematica 1

Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

16 settembre 2009

1. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{8(e^{-x^2} - \cos x)^3 + x^6}{4x^2(\cos x - 1)^2 \cos^2 x - x^6}.$$

2. Calcolare

$$\int_{-1}^1 (x + e^x)^2 (e^x - e^{-x}) dx.$$

3. Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare il numero di soluzioni dell'equazione

$$x + \alpha = 2 \log x.$$

4. Determinare il carattere della serie

$$\sum_n \cos(2n \operatorname{arctg} n) \operatorname{arctg} \frac{1}{n}.$$

5. Sia $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile con le seguenti proprietà:

(a) $f(0) = f(1) = 1$;

(b) l'insieme degli zeri, $Z = \{x \in [0, 1]: f(x) = 0\}$, ha 7 elementi.

Dimostrare che esiste un punto $\bar{x} \in Z$ tale che $f'(\bar{x}) = 0$.