Analisi Matematica 1
Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

$\boxed{\texttt{*AA**A**}}$

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 - \cos a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha. \end{cases}$$
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente proprietà:
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\log(1+x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sin x + \cos x - e^x + x^2.$$
Dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x nell'intervallo $(-\delta, 0)$ si ha $f(x) > 0$.

4. Dimostrare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^n)^n + n^{(2^n)}}{2^{(n!)} + (n!)^2}$$
è convergente.

5. Si consideri l'integrale improprio:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}}\, dx.$$
   (a) mostrare che l'integrale è finito;
   (b) calcolarne il valore.

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica 1
Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

*BB**B**

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 + \cos a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha. \end{cases}$$
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare $\lim_{n\to\infty} a_n$.

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente proprietà:
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\log(1+x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = e^x - \sin x - \cos x - x^2.$$
Dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x nell'intervallo $(-\delta, 0)$ si ha $f(x) < 0$.

4. Dimostrare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + (n^n)^n}{n^{(2^n)} + 2^{(n!)}}$$
è convergente.

5. Si consideri l'integrale improprio:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}}\, dx.$$
   (a) mostrare che l'integrale è finito;
   (b) calcolarne il valore.

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica 1
Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

`*CC**C**`

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 1 + \sin a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente proprietà:
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\log(1+x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = \sin x - \cos x - e^x + 2.$$
Dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x nell'intervallo $(-\delta, 0)$ si ha $f(x) > 0$.

4. Dimostrare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 + (n^n)^n}{2^{(n!)} + n^{(2^n)}}$$
è convergente.

5. Si consideri l'integrale improprio:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}}\, dx.$$
   (a) mostrare che l'integrale è finito;
   (b) calcolarne il valore.

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.

Analisi Matematica 1
Prova scritta n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

13 luglio 2009

`*DD**D**`

1. Si consideri la seguente successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n - 1 + \sin a_n, \\ a_1 = 2\pi\alpha - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$
Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ determinare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ è soddisfatta la seguente proprietà:
$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad 2\log(1+x^2) \geq \alpha x^2 - x^4.$$

3. Si consideri la funzione
$$f(x) = e^x + \cos x - \sin x - 2.$$
Dimostrare che esiste $\delta > 0$ tale che per ogni x nell'intervallo $(-\delta, 0)$ si ha $f(x) < 0$.

4. Dimostrare che la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(2^n)} + (n!)^2}{(n^n)^n + 2^{(n!)}}$$
è convergente.

5. Si consideri l'integrale improprio:
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{x \sin x}}\, dx.$$
   (a) mostrare che l'integrale è finito;
   (b) calcolarne il valore.

N.B. Sulla prima pagina del compito occorre scrivere, oltre al proprio nome e cognome, il codice di 8 lettere riportato nel riquadro in alto. Non è necessario consegnare questo foglio.