

# Analisi Matematica 1

## Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2008-2009

15 giugno 2009

1. Sia  $a_n$  la successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

\*A\*\*\*\*\*

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = -\frac{3}{2}. \end{cases}$$

\*B\*\*\*\*\*

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}(a_n - a_n^3), \\ a_1 = \frac{6}{5}. \end{cases}$$

\*C\*\*\*\*\*

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - a_n^3, \\ a_1 = -\frac{6}{5}. \end{cases}$$

\*D\*\*\*\*\*

Calcolare  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

*Soluzione.* Vediamo la soluzione per la variante A. La successione soddisfa l'equazione  $a_{n+1} = f(a_n)$  con

$$f(x) = \frac{3}{2}x - x^3 = x\left(\frac{3}{2} - x^2\right).$$

I punti fissi, cioè le soluzioni di  $f(x) = x$  sono i punti 0 e  $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ . Inoltre osserviamo che i punti  $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  sono anche i punti in cui la derivata di  $f$  cambia segno. Consideriamo l'intervallo aperto  $I = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ . Osserviamo che su  $I$  la funzione  $f$  è strettamente crescente e che gli estremi dell'intervallo sono punti fissi di  $f$ . Dunque si ha  $f(I) = I$  e di conseguenza se la successione entra nell'intervallo  $I$ , allora vi rimane definitivamente. In effetti possiamo verificare che

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = -\frac{9}{8}, \quad a_3 = -\frac{135}{512}$$

ed essendo  $a_3 \in I$  abbiamo  $a_n \in I$  per ogni  $n \geq 3$ .

Inoltre nell'intervallo  $I$  si ha  $f(x) < x$  dunque la successione  $a_n$  risulta essere strettamente decrescente per  $n \geq 3$ . Di conseguenza  $a_n$  ammette limite  $\ell$ . Visto che  $f$  è continua  $\ell$  deve essere un punto fisso di  $f$  ma siccome  $a_3 < 0$  e  $a_n < a_3$  l'unica possibilità è  $\ell = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Nella variante B tutti i segni sono invertiti, e il limite è quindi  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

La variante C è analoga alla A. Il limite risulta essere  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

La variante D è analoga alla A. Il limite risulta essere  $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

2. Al variare del parametro  $x \in \mathbb{R}$  determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2} x^n \quad \boxed{\text{**A**}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-n}{n^2} x^n \quad \boxed{\text{**B**}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2} x^n \quad \boxed{\text{**C**}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{1+n^2} x^n \quad \boxed{\text{**D**}}$$

*Soluzione.* Consideriamo la variante A. Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta tramite il criterio del rapporto. Se  $a_n$  è il termine generico della nostra serie, si ha:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n+3}{(n+1)^2} \frac{n^2}{n+2} |x| \rightarrow |x| \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Se  $|x| > 1$ , applicando il criterio del rapporto per le successioni, si trova  $|a_n| \rightarrow \infty$  e dunque  $a_n$  non è infinitesimo e la serie non converge. Se  $|x| < 1$  la serie converge assolutamente e dunque converge.

Nel caso  $x = 1$  si verifica che  $a_n \sim \frac{1}{n}$  e dunque la serie diverge. Nel caso  $x = -1$  osserviamo che  $|a_n| = \frac{n+2}{n^2}$  è decrescente e infinitesima (la monotonia si può verificare studiando la derivata della funzione  $f(x) = \frac{x+2}{x^2}$ ). Dunque si può applicare il criterio di convergenza per le serie alternate per ottenere che la serie converge (ma non converge assolutamente).

Nella variante B si può raccogliere un segno *meno* e poi applicare lo stesso procedimento del caso A. I risultati sono gli stessi.

Nelle varianti C e D si applica lo stesso metodo e si ottiene lo stesso risultato della variante A.

3. Al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin^2 x + \cos(x^2) - x^2)^3 - 1}{x^\alpha \log(1+x)} \quad \boxed{\text{*****A**}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\tan^2 x + \cos(x^2) - x^2)^3 - 1}{x \log(1+x^\alpha)} \quad \boxed{\text{*****B**}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\tan^2 x + e^{(x^4)} - x^2)^3 - 1}{x^\alpha \log(1+x^2)} \quad \boxed{\text{*****C**}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sin^2 x + e^{(x^4)} - x^2)^3 - 1}{x^2 \log(1+x^\alpha)} \quad \boxed{\text{*****D**}}$$

*Soluzione.* Consideriamo la variante A. Utilizziamo gli sviluppi:

$$\sin^2 x = \left( x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4),$$

$$\cos(x^2) = 1 - \frac{x^4}{2} + o(x^4),$$

$$\log(1+x) = 1 + x + o(x).$$

Da cui:

$$\begin{aligned} (\sin^2 x + \cos(x^2) - x^2)^3 - 1 &= \left(x^2 - \frac{x^4}{3} + 1 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4)\right)^3 - 1 \\ &= \left(1 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)\right)^3 - 1 = 1 - \frac{5}{2}x^4 + o(x^4) - 1 = -\frac{5}{2}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

e quindi

$$\frac{-\frac{5}{2}x^4 + o(x^4)}{x^\alpha(x + o(x))} = \frac{-\frac{5}{2} + o(1)}{x^{\alpha-3} + o(x^{\alpha-3})}.$$

In conclusione vediamo che se  $\alpha = 3$  il limite vale  $-\frac{5}{2}$ , se  $\alpha > 3$  il limite è  $-\infty$  e se  $\alpha < 3$  il limite è 0.

Nel caso B utilizzeremo anche lo sviluppo:

$$\tan^2 x = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4).$$

Da cui, per  $\alpha > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\left(x^3 + \frac{2}{3}x^4 + 1 - \frac{x^4}{2} - x^2 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x(x^\alpha + o(x^\alpha))} &= \frac{\left(1 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})} \\ &= \frac{1 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x^{\alpha+1} + o(x^{\alpha+1})} = \frac{\frac{1}{2} + o(1)}{x^{\alpha-3} + o(x^{\alpha-3})}. \end{aligned}$$

In conclusione se  $\alpha = 3$  il limite vale  $\frac{1}{2}$ , se  $\alpha > 3$  il limite vale  $+\infty$  e se  $0 < \alpha < 3$  il limite vale 0. Se  $\alpha \leq 0$  a maggior ragione il limite è zero, in quanto  $\log(1 + x^\alpha) \geq \log(2)$ .

Nel caso C utilizziamo anche lo sviluppo

$$e^{x^4} = 1 + x^4 + o(x^4).$$

Da cui

$$\begin{aligned} \frac{\left(x^2 + \frac{2}{3}x^4 + 1 + x^4 - x^2 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^\alpha(x^2 + o(x^2))} &= \frac{\left(1 + \frac{5}{3}x^4 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} \\ &= \frac{1 + 5x^4 + o(x^4) - 1}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} = \frac{5 + o(1)}{x^{\alpha-2} + o(x^{\alpha-2})}. \end{aligned}$$

In conclusione se  $\alpha = 2$  il limite è 5, se  $\alpha > 2$  il limite è  $+\infty$  e se  $\alpha < 2$  il limite è 0.

Nel caso D si ha per  $\alpha > 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + 1 + x^4 - x^2 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^2(x^\alpha + o(x^\alpha))} &= \frac{\left(1 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)^3 - 1}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} \\ &= \frac{1 + 2x^4 + o(x^4) - 1}{x^{\alpha+2} + o(x^{\alpha+2})} = \frac{2 + o(1)}{x^{\alpha-2} + o(x^{\alpha-2})}. \end{aligned}$$

In conclusione se  $\alpha = 2$  il limite vale 2, se  $\alpha > 2$  il limite vale  $+\infty$  e se  $\alpha < 2$  il limite vale 0 (il caso  $\alpha \leq 0$  si tratta come in B).

4. Determinare il numero di soluzioni dell'equazione

\*\*\*\*\*A\*

$$\frac{\pi}{4} + \log(x^3 - x) = \operatorname{arctg} x.$$

\*\*\*\*\*C\*

$$\frac{\pi}{4} + \log(x - x^3) + \operatorname{arctg} x = 0.$$

\*\*\*\*\*B\*

*Soluzione.* Nei casi A e C le soluzioni dell'equazione sono gli zeri della funzione

\*\*\*\*\*D\*

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \log(x^3 - x) - \operatorname{arctg} x.$$

Il dominio di esistenza è dato da  $x^3 - x > 0$  cioè dagli intervalli  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ . Il limite della funzione nei punti  $-1, 0$  e  $1$  è  $-\infty$  mentre per  $x \rightarrow +\infty$  il limite è  $+\infty$ .

Studiamo la derivata:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^3 - x} - \frac{1}{1 + x^2} = \frac{3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1}{(x^3 - x)(1 + x^2)}$$

in particolare ci interessa il segno del numeratore

$$g(x) = 3x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 1.$$

Si ha

$$\begin{aligned} g'(x) &= 12x^3 - 3x^2 + 4x + 1, \\ g''(x) &= 36x^2 - 6x + 4. \end{aligned}$$

È facile verificare che  $g''(x) > 0$  per ogni  $x$ , dunque  $g'$  è strettamente crescente. Inoltre  $g'(-1) < 0$  e  $g'(0) > 0$ , dunque esiste un (unico) punto  $x_1 \in (-1, 0)$  tale che  $g'(x_1) = 0$  e  $g'(x) < 0$  per  $x < x_1$  e  $g'(x) > 0$  per  $x > x_1$ . Questo significa che  $g$  è decrescente in  $(-1, x_1]$  e crescente in  $[x_1, 0)$  e anche in  $(1, +\infty)$ . Osserviamo che  $g(-1) > 0$ ,  $g(0) < 0$  e  $g(1) > 0$ . Dunque in  $x_1$  la funzione  $g$  ha un minimo con valore negativo. Esiste dunque un punto  $x_2 \in (-1, x_1)$  in cui  $g(x_2) = 0$  e  $g(x) > 0$  per  $x < x_2$  e  $g(x) < 0$  per  $x \in (x_2, -1)$ . Per  $x > 1$  si ha  $g(x) > 0$ .

La funzione  $f'$  ha lo stesso segno di  $g$  sul suo insieme di definizione. Sull'intervallo  $(1, +\infty)$  la funzione  $f$  risulta quindi continua e strettamente crescente. Siccome agli estremi dell'intervallo i limiti hanno segno diverso, concludiamo che in  $(1, +\infty)$  c'è un unico zero della funzione  $f$ .

Dunque il punto sta nel capire qual è il segno di  $g(x_2)$  in quanto se fosse  $g(x_2) > 0$  avremmo altre due soluzioni, mentre se fosse  $g(x_2) < 0$  non ci sarebbero altre soluzioni.

Per dimostrare che in effetti  $g(x_2) > 0$  è sufficiente trovare un qualunque valore  $x \in (-1, 0)$  tale che  $g(x) > 0$ . Una possibile scelta è  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$  che è il punto in cui  $\log(x^3 - x)$  ha massimo e per il quale sappiamo valutare l'arcotangente. Per tale valore si può verificare che  $g(x) > 0$ .

In conclusione abbiamo tre soluzioni distinte di cui due comprese tra  $-1$  e  $0$  e una maggiore di  $1$ .

Nei casi B e D si ottengono gli stessi risultati con i segni della variabile  $x$  invertiti.

5. Si consideri la funzione

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t} dt$$

definita per  $x > 0$  e  $x \neq 1$ .

- Dimostrare che  $f$ ,  $f'$  e  $f''$  sono definite e positive in ogni punto del dominio di  $f$  (cioè per  $x > 0$  e  $x \neq 1$ ).
- Calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- Dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) - f(1/x) = 0$ .
- Dimostrare che la funzione  $f$  può essere estesa per continuità nel punto  $x = 1$ .

*Soluzione.* Se  $x > 1$  la funzione integranda è positiva e gli estremi di integrazione sono ordinati  $x < x^2$ . Dunque l'integrale è positivo. Se  $x < 1$  la funzione integranda è negativa ma gli estremi di integrazione sono scambiati:  $x^2 < x$ . Dunque l'integrale è comunque positivo. Questo significa che  $f(x) > 0$  per ogni  $x$  nel suo dominio.

La funzione  $\frac{1}{\log t}$ , essendo continua, ammette un primitiva, in base al teorema fondamentale del calcolo. Sia  $F(x)$  una qualunque primitiva. Si ha dunque

$$f(x) = F(x^2) - F(x), \quad F'(x) = \frac{1}{\log x}$$

da cui

$$f'(x) = \frac{2x}{\log x^2} - \frac{1}{\log x} = \frac{x-1}{\log x}.$$

È facile verificare che  $f'(x) > 0$  per ogni  $x$  nel dominio di  $f$ . Derivando ulteriormente si ha:

$$f''(x) = \frac{\log x - (x-1)/x}{\log^2 x} = \frac{x \log x - x + 1}{x \log^2 x}.$$

Per studiare il segno di  $f''(x)$  poniamo:

$$g(x) = x \log x - x + 1$$

si ha dunque

$$g'(x) = \log x$$

che è positivo per  $x > 1$ . Dunque la funzione  $g$  è decrescente per  $x < 1$  e crescente per  $x > 1$ . Per  $x \rightarrow 1$  la funzione tende a 0 e dunque osserviamo che  $g(x) > 0$  per ogni  $x > 0$ ,  $x \neq 1$ . Questo ci permette di concludere che anche  $f''(x) > 0$  sul dominio di  $f$ .

Veniamo ora al quesito (b). Per  $t \rightarrow 0^+$  notiamo che la funzione  $1/\log t$  ammette limite 0 e dunque può essere estesa per continuità al valore  $t = 0$ . Di conseguenza possiamo supporre che anche  $F$  sia definita anche per  $x = 0$ . Essendo inoltre  $F$  continua, si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} F(x^2) - F(x) = F(0) - F(0) = 0.$$

Per quanto riguarda il limite per  $x \rightarrow +\infty$  osserviamo che la funzione  $1/\log t$  risulta essere decrescente. Dunque si ha:

$$\int_x^{x^2} \frac{1}{\log t} dt \geq \int_x^{x^2} \frac{1}{\log x^2} dt = \frac{1}{2 \log x} (x^2 - x) \rightarrow +\infty$$

per  $x \rightarrow +\infty$ .

Per quanto riguarda il punto (c), utilizziamo il cambio di variabili  $t = 1/s$ ,  $dt = -1/s^2 ds$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(1/x) &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t} dt - \int_x^{x^2} \frac{-1}{s^2 \log \frac{1}{s}} ds \\ &= \int_x^{x^2} \frac{1}{\log t} - \frac{1}{t^2 \log t} dt \\ &= \int_x^{x^2} \frac{t^2 - 1}{t^2 \log t} dt \end{aligned}$$

ora siccome la funzione integranda ammette limite finito per  $t \rightarrow 1$ , la funzione integrale è continua e l'integrale di estremi  $x$  e  $x^2$  converge a 0 quando  $x^2 - x \rightarrow 0$ .

Per quanto riguarda il punto (d) basta osservare che la funzione  $f$  è strettamente crescente per quanto visto al punto (a). Dunque i limiti destro e sinistro per  $x \rightarrow 1$  esistono entrambi. Ma facendo il cambio di variabili  $x \mapsto 1/x$  si osserva che il limite destro di  $f(x)$  è uguale al limite sinistro di  $f(1/x)$ . Dunque per quanto visto al punto (c) i due limiti sono uguali.