

Analisi Matematica IV modulo

Prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

23 maggio 2008

1. Disegnare approssimativamente le curve di livello della funzione

$$f(x, y) = 2x^3 - 3x^2 - y^4 - y^2.$$

In particolare dire per quali valori di $c \in \mathbb{R}$ l'insieme di livello

$$L_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}$$

è connesso e per quali è limitato.

(*facoltativo*) Dire se esiste una curva continua $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che

$$\gamma(0) = (0, 1/2), \quad \gamma(1) = (2, 1) \quad \text{e} \quad f(\gamma(t)) \geq f(\gamma(0)) \quad \forall t \in [0, 1].$$

2. Si consideri la forma differenziale

$$\omega = \frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x + x^4 + x^2 y^2}{x^2 + y^2} dy.$$

Dire se ω è chiusa e se è esatta. Calcolare $\int_{\gamma} \omega$ sulla curva

$$\gamma(t) = (\cos(4t), \sin(3t)), \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

3. Calcolare l'area della regione di piano

$$C = \{(x, y) : y \leq 2 - x^2, y \geq x\} \cup \{(x, y) : x \leq 2 - y^2, y \leq x\}.$$

Calcolare inoltre l'integrale

$$\iint_C \frac{y - x}{1 + x^2 + y^2} dx dy.$$