

Analisi Matematica IV modulo

Prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

18 aprile 2008

1. Risolvere

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} \left(1 + \frac{1}{\log y - \log x} \right) \\ y(e) = 1. \end{cases}$$

(8 punti)

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = (xy + y) \log y + xy'.$$

(a) Trovare la soluzione con la condizione $y(2) = e$.

(8 punti)

(b) Discutere se con la condizione $y(1) = 1$ c'è esistenza e unicità della soluzione.

(4 punti)

3. Studiare qualitativamente le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{x}{1+x^2} - xy.$$

In particolare:

(a) Studiare la soluzione passante per il punto $(0, \frac{1}{2})$.

(4 punti)

(b) Determinare il valore $y(1)$ della soluzione passante per il punto $(-1, 1)$.

(4 punti)

(c) Dimostrare che la soluzione passante per il punto $(0, 1)$ è strettamente decrescente su tutto l'intervallo $x \geq 0$.

(3 punti)

(d) Sfruttando il carattere lineare dell'equazione mostrare che la differenza tra due soluzioni tende a zero, per $x \rightarrow +\infty$, più velocemente di qualunque potenza.

(3 punti)

Nota. Si consiglia di svolgere i punti 2.(b), 3.(c) e 3.(d) dopo aver svolto il resto del compito.