Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

18 gennaio 2008

1. Si consideri la successione di funzioni
$$f_k(x) = \frac{x - \log x}{kx}.$$
   (a) Studiarne la convergenza uniforme negli intervalli $(1, +\infty)$ e $(0, +\infty)$.
   (b) Studiare la convergenza uniforme in $(1, +\infty)$ della successione f_k' delle derivate.

   Soluzione. La funzione è del tipo $f_k(x) = g(x)/k$ dove
$$g(x) = \frac{x - \log x}{x}$$
   dunque chiaramente la successione tende puntualmente a zero sul suo insieme di definizione $(0, +\infty)$.

   Siccome $\lim_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$, le funzioni f_k sono tutte non limitate su $(0, +\infty)$ cioè $\sup_{(0,+\infty)} |f_k| = +\infty$ e quindi non c'è convergenza uniforme su $(0, +\infty)$.

   Invece sull'intervallo $(1, +\infty)$ c'è convergenza uniforme. Infatti la funzione g è limitata su tale intervallo (in quanto all'infinito g tende a zero) e dunque $\sup_{(1,+\infty)} |f_k| = \frac{1}{k} \sup_{(1,+\infty)} g \to 0$.

   Stesso ragionamento vale per $f_k' = g'/k$ infatti anche g' risulta essere limitata su $(1, +\infty)$.

   Facendo uno studio più approfondito delle funzioni f_k e f_k' si sarebbe trovato:
$$\sup_{(1,+\infty)} |f_k| = \frac{1}{k} \tag{1}$$
$$\sup_{(1,+\infty)} |f_k'| = \frac{1}{k}. \tag{2}$$

2. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\log(x^2+y^2) & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Dire se la funzione è differenziabile in $(0,0)$. Dire se la funzione è derivabile due volte in $(0,0)$.

Soluzione. Visto che $f(x,0) = 0$ e $f(0,y) = 0$ possiamo immediatamente dire che $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = 0$ e $f_{yy}(0,0) = 0$.

Dimostriamo ora che f è differenziabile in $(0,0)$. Si ha infatti

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x,y) - f(0,0) - xf_x(0,0) - yf_y(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= \frac{|xy\log(x^2+y^2)|}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &\leq \sqrt{x^2+y^2}\,|\log(x^2+y^2)| \to 0 \end{aligned}$$

per $(x,y) \to (0,0)$.

Per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha

$$f_x(x,y) = y\log(x^2+y^2) + \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$$

e dunque

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\log h^2}{h} = -\infty.$$

Questo significa che la funzione non è derivabile due volte, in quanto una delle derivate seconde non è finita.

3. Determinare i punti di massimo e minimo relativo della funzione

$$f(x,y) = 3x^4 + y^6 - 4x^3y^2.$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} f_x &= 12x^2(x - y^2) \\ f_y &= 6y^5 - 8x^3y. \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema $f_x = 0$, $f_y = 0$ si trovano tre soluzioni: $(0,0)$, $(3/4, \pm\sqrt{3}/2)$ e dunque tre punti critici. Osserviamo che sulle rette orizzontali $y = y_0$, la funzione assume minimo assoluto per $x = y^2$, dove si annulla f_x. Studiamo poi la funzione sulla parabola $x = y^2$. Posto $g(y) = f(y^2, y)$ si ha

$$g(y) = y^6 - y^8, \qquad g'(y) = 6y^5 - 8y^7 = 2y^5(3 - 4y^2).$$

Dunque la funzione $g(y)$ ha un minimo relativo per $y = 0$ (in corrispondenza del punto $(0, 0)$) e un massimo relativo per $y = \pm\sqrt{3}/2$. Visto che su ogni retta orizzontale la funzione ha minimo per $x = y^2$ e che su tale curva c'è un minimo relativo in $(0, 0)$ concludiamo che $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo. Invece gli altri due punti critici devono essere punti di sella in quanto lungo le rette orizzontali presentano un comportamento di minimo mentre lungo la curva $x = y^2$ presentano un massimo relativo.