Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

19 dicembre 2007

1. (a) Studiare la continuità, derivabilità e differenziabilità della funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

`*****A**`

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

`*****B**`

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y+y^2}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

`*****C**`

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2+x^2y^2} & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

`*****D**`

nel punto $(0,0)$.

(b) Posto $g(t) = f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)$ determinare il valore massimo assunto da $g'(0)$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Vediamo innanzitutto la versione `A`. Osserviamo che $f(x,0) = x$ mentre $f(0,y) = 0$. Dunque la funzione ammette derivate parziali nel punto $(0,0)$ e si ha $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 0$. Vogliamo ora dimostrare che la funzione è differenziabile in $(0,0)$, cioè che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2+x^2y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Si ha infatti:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2+x^2y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| &= \frac{|x|^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+x^2y^2)} \\ &\leq \frac{|x|^3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2)} \\ &\leq x^2+y^2 \to 0. \end{aligned}$$

Dunque la funzione è differenziabile e di conseguenza è continua nel punto $(0,0)$.

Nel caso `B`, dimostriamo invece che la funzione è continua e derivabile ma non differenziabile. Per la continuità è sufficiente notare che

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2+x^2y^2}\right| \leq \frac{|x|^3}{x^2+y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0.$$

Le derivate parziali in $(0,0)$ si calcolano semplicemente osservando che $f(x,0) = x$ e $f(0,y) = 0$ e dunque si ha come prima $f_x(0,0) = 1$, $f_y(0,0) = 0$. La funzione non è differenziabile in $(0,0)$ in quanto se nel limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^3}{x^2+y^2+x^2y^2} - x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

si sostituisce $x = y$ e ci si restringe a $x > 0$, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^3}{2x^2+x^4} - x}{\sqrt{2}x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 - 2x^3 - x^5}{2x^3+x^5} = -\frac{1}{2}.$$

Nella versione `B` la funzione non è né continua né derivabile né tantomeno differenziabile. Basta osservare che $f(0,y) = 1$ per $y \neq 0$ mentre $f(0,0) = 0$. Dunque f non è continua e quindi non è nemmeno differenziabile. Inoltre visto che neanche la restrizione $f(0,y)$ è continua, non esiste neanche la derivata parziale rispetto a y e quindi la funzione non è derivabile.

La versione `D` si risolve in maniera analoga alla versione `B`.

Per quanto riguarda il punto (b) osserviamo innazitutto che $g'(0)$ non è altro che la derivata direzionale $D_v f(0,0)$ rispetto alla direzione $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Dunque se la funzione è differenziabile già sappiamo che il massimo della derivata direzionale si ha nella direzione del gradiente, e il valore massimo assunto da $g'(0)$ è dunque $|\nabla f(0,0)| = |(1,0)| = 1$ e viene assunto per $\alpha = 0 + 2k\pi$. Questo ragionamento si applica nel caso `A`. Nei casi `B` e `D` la funzione non è differenziabile e dobbiamo calcolare esplicitamente $g'(0)$ in funzione di α. Ad esempio nella versione `B` si ha

$$\begin{aligned} g(t) &= \begin{cases} \frac{t^3\cos^3\alpha}{t^2+t^4\cos^2\alpha\sin^2\alpha} & \text{per } t \neq 0 \\ 0 & \text{per } t = 0 \end{cases} \\ &= \frac{t\cos^3\alpha}{1+t^2\cos^2\alpha\sin^2\alpha} \end{aligned}$$

e dunque la derivata $g'(0)$ vale[1]

$$g'(0) = \frac{\cos^3\alpha \cdot 1 - 0 \cdot (\ldots)}{1^2} = \cos^3\alpha.$$

Chiaramente il massimo di questo valore si ha quando $\cos\alpha = 1$ cioè per $\alpha = 2k\pi$. Nella versione `D` si trova $g'(0) = \cos^2\alpha\sin\alpha = (1-\sin^2\alpha)\sin\alpha$. Ponendo $s = \sin\alpha$ si ha $g'(0) = s - s^3$. La derivata rispetto ad s è $1 - 3s^2$ e studiando la funzione tra -1 e 1 si trova facilmente che assume massimo per $s = 1/\sqrt{3}$. Il valore massimo assunto da $g'(0)$ è dunque $1/\sqrt{3} - 1/(3\sqrt{3})$ $= 2/(3\sqrt{3})$.

Nella versione `C` la funzione $g(t)$ non è derivabile se non per $\alpha = 0$. Dunque la domanda posta non ha senso (c'è infatti un errore di battitura nel testo assegnato).

2. Determinare il massimo ed il minimo assoluto della funzione

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - x + 1$$ ******A*

nel semicerchio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq x\}$.

$$f(x,y) = y - x^2y - y^3 + 1$$ ******B*

nel semicerchio $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 1, \ y \geq x\}$.

$$f(x,y) = x^2 - y^2 - x^3 + xy^2$$ ******C*

nel triangolo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ -x \leq y \leq x, \ x \leq 2\}$.

$$f(x,y) = x^2y - y^3 - 2xy + 2y^2$$ ******D*

nel triangolo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq y \leq x \leq 2\}$.

Soluzione. Versione A. Sappiamo che la funzione ammette massimo e minimo in quanto è una funzione continua e il dominio è chiuso e limitato. I punti di massimo e minimo assoluto saranno o punti interni e in tal caso devono essere punti critici di f, oppure staranno sulla frontiera e dovranno quindi essere massimi o minimi per la funzione ristretta alla frontiera.

Determiniamo innanzitutto i punti critici di f interni al dominio. Si ha

$$f_x = 3x^2 + y^2 - 1, \qquad f_y = 2xy$$

da cui si trova che entrambe le derivate parziali si annullano nei punti $(0, \pm 1)$ e $(\pm\sqrt{3}/3, 0)$. Di questi solo il punto $(-\sqrt{3}/3, 0)$ è interno al dominio assegnato (gli altri punti sono esterni o di frontiera). Su tale punto la funzione assume il valore $f(-\sqrt{3}/3, 0) = 1 + 2/(3\sqrt{3})$.

La frontiera del dominio può essere suddivisa in due curve, l'arco di cerchio $(\cos t, \sin t)$ con $t \in [\pi/4, 5\pi/4]$ e il segmento $y = x$ con $x \in [-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$. Sull'arco di cerchio si puó verificare direttamente che la funzione assume il valore costante 1, infatti si ha $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)x + 1 = 1$ se $x^2 + y^2 = 1$. Sul segmento $y = x$ si ha $g(x) = f(x,x) = 2x^3 - x + 1$, $g'(x) = 6x^2 - 1$. Dunque g ha un massimo per $x = -1/\sqrt{6}$ e un minimo per $x = 1/\sqrt{6}$. Su tali punti la funzione vale $f(\pm 1/\sqrt{6}, \pm 1/\sqrt{6}) = 1 \mp 2/(3\sqrt{6})$. Gli estremi del diametro vanno pure presi in considerazione, ma già sappiamo che in tali punti la funzione vale 1 in quanto si trovano sulla circonferenza. Il massimo e minimo assoluto della funzione devono essere tra i valori presi in considerazione. Dunque il minimo assoluto è $1 - 2/(3\sqrt{6})$ e il massimo assoluto è $1 + 2/(3\sqrt{6})$.

Versione B. Si procede in maniera analoga alla versione A. L'unico punto critico interno al dominio è $(0, 1/\sqrt{3})$ su cui la funzione vale $1 + 2/(3\sqrt{3})$. Sulla semicirconferenza la funzione è costante 1. Sul diametro il comportamente è lo stesso del caso A. Il massimo assoluto è dunque $1 + 2/(3\sqrt{3})$ e il minimo assoluto è $1 - 2/(3\sqrt{6})$.

Versione C. Il dominio è il triangolo di vertici $(0,0)$, $(2,-2)$ e $(2,2)$. Si procede con lo stesso metodo delle versioni precedenti. L'unico punto critico interno al dominio è $(2/3, 0)$, su tale punto la funzione assume il valore $4/27$. Per la parte di frontiera contenuta nelle rette $y = x$ e $y = -x$ la funzione assume il valore

[1] Invece che scrivere per esteso $g'(t)$ è molto più veloce fare direttamente la sostituzione $t = 0$ man mano che si svolge la derivata.

costante 0. Sul segmento $x = 2$, $y \in [-2, 2]$ la funzione vale $f(2, y) = y^2 - 4$ ed ha un punto di minimo in $y = 0$. In corrispondenza la funzione assume il valore $f(2, 0) = -4$. Dunque il minimo assoluto è -4 e il massimo assoluto è $4/27$.

Versione `D`. Il dominio è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(2, 0)$ e $(2, 2)$. Si procedente come nelle versioni precedenti. L'unico punto critico interno al dominio è $(1, 1/3)$. In tal punto la funzione assume il valore $-4/27$. Sulle rette $y = x$ e $y = 0$ la funzione assume il valore costante 0. Sulla retta $x = 2$ la funzione assume i valori $f(2, y) = -y^3 + 2y^2$. Studiando la derivata si osserva un massimo per $y = 4/3$ su cui la funzione assume il valore $f(2, 4/3) = 32/27$. Il minimo assoluto è dunque $-4/27$ il massimo assoluto è $32/27$.

3. Determinare, al variare del parametro α, la natura (massimo/minimo/sella) del punto $(0, 0)$ per la funzione

$$f(x, y) = (x + 2y) \sin x + \alpha(x^2 + y^2).$$

`*******A`

$$f(x, y) = (2x + \alpha y) \sin y + \alpha x^2 - \cos x$$

`*******B`

$$f(x, y) = 4y \sin x + \alpha x^2 + 5\alpha y^2 - 2\alpha xy$$

`*******C`

$$f(x, y) = 4y \sin x + 5\alpha x^2 + \alpha y^2 - 2\alpha xy$$

`*******D`

Soluzione. Versione `A`. Si ha

$$\begin{aligned} f_x &= \sin x + x \cos x + 2y \cos x + 2\alpha x, \\ f_y &= 2 \sin x + 2\alpha y, \\ f_{xx} &= 2 \cos x - x \sin x - 2y \sin x + 2\alpha, \\ f_{xy} &= 2 \cos x, \\ f_{yy} &= 2\alpha. \end{aligned}$$

Per sostituzione si verifica dunque che $(0, 0)$ è un punto critico, in quanto annulla entrambe le derivate prime. La matrice hessiana è invece

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 + 2\alpha & 2 \\ 2 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

e il determinante hessiano assume il valore $4(\alpha^2 + \alpha - 1)$. Studiando il segno di questa quantità al variare di α si trova che il determinante hessiano si annulla per i valori $\alpha = (-1 \pm \sqrt{5})/2$. Per $\alpha < (-1 - \sqrt{5})/2$ il determinante è positivo e la traccia è negativa. Dunque il punto $(0, 0)$ è un massimo relativo. Per $(-1 - \sqrt{5})/2 < \alpha < (-1 + \sqrt{5})/2$ il determinante è negativo e dunque $(0, 0)$ è un punto di sella. Per $\alpha > (-1 + \sqrt{5})/2$ il determinante è positivo e la traccia è positiva e dunque $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo.

Le versioni `B`, `C` e `D` si risolvono in maniera analoga. La matrice hessiana risulta essere rispettivamente

$$\begin{pmatrix} 2\alpha + 1 & 2 \\ 2 & 2\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2\alpha & 4 - 2\alpha \\ 4 - 2\alpha & 10\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 10\alpha & 4 - 2\alpha \\ 4 - 2\alpha & 2\alpha \end{pmatrix}.$$