Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2007-2008

27 novembre 2007

1. Stabilire se la seguente successione di funzioni converge uniformemente nell'intervallo indicato

$$f_n(x) = \frac{x}{(1-x)^n}, \qquad x \in [-1, 0]$$ `*A******`

$$f_n(x) = \frac{nx}{(1-x)^n}, \qquad x \in [-1, 0]$$ `*B******`

$$f_n(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n, \qquad x \in [1, +\infty)$$ `*C******`

$$f_n(x) = \frac{n}{x}\left(\frac{x}{x+1}\right)^n, \qquad x \in [1, +\infty)$$ `*D******`

Soluzione. È facile verificare che tutte le successioni proposte convergono puntualmente a zero nell'intervallo indicato.

Nella versione `A` la funzione f_n risulta essere negativa e ha un minimo per $x = -\frac{1}{n-1}$. Dunque

$$\sup_{x\in[-1,0]} |f_n(x)| = -f_n\left(-\frac{1}{n-1}\right) = \frac{\frac{1}{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \to 0$$

che significa che la successione data converge uniformemente a zero. Nella versione `B` la funzione ha un lo stesso segno e minimo nello stesso punto. Si ha però:

$$\sup |f_n(x)| = -f_n\left(-\frac{1}{n-1}\right) = \frac{\frac{n}{n-1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} \to 1/e.$$

Dunque nel caso `B` la convergenza non è uniforme.

Nel caso `C`, la funzione f_n è positiva e ammette massimo per $x = n - 1$. Dunque si ha

$$\sup |f_n| = f_n(n-1) = \frac{1}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \to 0$$

cioè la successione converge uniformemente a zero. Nel caso `D` la funzione ha massimo nello stesso punto ma si ha

$$\sup |f_n| = f_n(n-1) = \frac{n}{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n \to 1/e$$

e quindi la convergenza non è uniforme.

2. Calcolare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{2^k}.$$ `***A****`

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k}{3^k}.$$ `***B****`

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-k}{2^k}.$$ `***C****`

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-k}{3^k}.$$ `***D****`

Soluzione. Sappiamo che la serie geometrica è una serie di potenze con raggio di convergenza 1, e per $x \in (-1,1)$ si ha

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}.$$

La serie delle derivate ha lo stesso raggio di convergenza e converge alla derivata della serie:

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

derivando ancora si ottiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}.$$

Moltiplicando per x^2 ambo i membri si ottiene

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^k = \frac{2x^2}{(1-x)^3}$$

che con la sostituzione $x = 1/2$ o $x = 1/3$ risolve la versione `C` o `D` con i valori 4 e 3/4. Spostando gli indici $k \mapsto k+1$ si ottiene invece

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^{k-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

e moltiplicando per x

$$\sum_{k=1}^{\infty}(k+1)kx^{k} = \frac{2x}{(1-x)^3}$$

che ci permette di risolvere i casi `A` e `B` con i valori 8 e 9/4.

3. Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sqrt{|y|}}{(x^2+y^2)\cos x}.$$ `****A***`

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2\sqrt{|x|}}{(x^2+y^2)e^x}.$$ `****B***`

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy^3|}}{(1+\sqrt{|x|})(x^2+y^2)}.$$ `****C***`

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|x^3y|}}{(1+\sqrt{|x|})(x^2+y^2)}.$$ `****D***`

Soluzione. Nei casi `A` e `B` osserviamo che i termini $\cos x$ e e^x tendono a 1 per $x \to 0$ e dunque non influenzano l'eventuale esistenza del limite. La parte rimanente (nel caso `A`) si stima così:

$$\frac{x^2\sqrt{|y|}}{(x^2+y^2)} \le \frac{\rho^2\sqrt{\rho}}{\rho^2} = \sqrt{\rho} \to 0.$$

Dunque nei casi `A` e `B` il limite esiste ed è zero.

Nei casi `C` e `D` è sufficiente restringersi a $y = x$ per trovare (as esempio nel caso `C`)

$$\frac{x^2}{(1+\sqrt{|x|})2x^2} = \frac{1}{1+\sqrt{|x|}} \to 1$$

mentre si ha chiaramente che per $y = 0$ il limite risulta essere 0. Dunque nei casi `C` e `D` il limite non esiste.