

Analisi Matematica I e II modulo

Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

6 giugno 2007

1. Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_{n+1} = e^{a_n - 1} \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ calcolare il limite della successione.

2. Studiare la continuità e la derivabilità nel punto $x = 0$ della funzione

$$f(x) = |x| \sin x.$$

3. Si consideri la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = e^{-x} - x.$$

Mostrare che f è bigettiva. Mostrare inoltre che la derivata della funzione inversa è limitata.

4. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x(1 - \cos^7 x)}.$$

5. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{\left(1 + \cos \frac{x}{2}\right)^2} dx.$$

6. Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$