

# Analisi Matematica I modulo

## Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

21 dicembre 2006

1. Sia  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

\*\*\*\*\*A\*\*

$$g(x) = \begin{cases} (1-x) \sin \frac{1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e si ponga  $f(x) = g(\cos x)$ . Studiare la continuità e la derivabilità della funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Soluzione.* Osserviamo che si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \sin \frac{1}{x-1} = 0 = g(1)$$

in quanto la funzione  $\sin$  è limitata e  $1-x \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow 1$ . Dunque la funzione  $g$  è continua e  $f$  è composizione di funzioni continue e di conseguenza è essa stessa continua.

Chiaramente  $g$  è derivabile per  $x \neq 1$ . Di conseguenza  $f$  è derivabile nei punti in cui si ha  $\cos x \neq 1$  cioè per  $x \neq 2k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Se  $\cos x = 1$  dobbiamo fare il limite del rapporto incrementale:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2k\pi + h) - f(2k\pi)}{h} &= \frac{(1 - \cos(2k\pi + h)) \sin \frac{1}{\cos(2k\pi + h) - 1}}{h} \\ &= \frac{1 - \cos h}{h} \sin \frac{1}{\cos h - 1}. \end{aligned}$$

Ricordando che  $(1 - \cos h)/h \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow 0$  (è l'opposto del rapporto incrementale della funzione  $\cos$ ) e osservando che la funzione  $\sin$  è limitata, si ottiene che il limite precedente è nullo. Dunque la funzione  $f$  è derivabile anche nei punti  $x = 2k\pi$ .

\*\*\*\*\*B\*\*

Il compito B si risolve in maniera analoga. Nel compito C la funzione  $g$  è comunque continua e dunque anche la funzione  $f$  è continua (analogamente a prima). Il limite del rapporto incrementale di  $f$  nei punti in cui  $1 - \sin x = 1$  ovvero per  $x = k\pi$  è invece:

\*\*\*\*\*C\*\*

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(k\pi + h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(k\pi + h) \cos \frac{-1}{\sin(k\pi + h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pm \sin h}{h} \cos \frac{1}{\sin h}. \end{aligned}$$

Osserviamo che  $(\sin h)/h \rightarrow 1$  per  $h \rightarrow 0$  mentre il limite di  $\cos(1/\sin h)$  non esiste per  $h \rightarrow 0$ . Di conseguenza il limite in questione non esiste e la funzione  $f$ , dunque, non è derivabile nei punti  $x = k\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ .

\*\*\*\*\*D\*\*

Il compito D si risolveva in maniera analoga.

2. Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

\*\*\*\*\*A\*

$$f(x) = \arcsin(\sin(\sqrt[3]{x})).$$

- (a) Studiare la continuità della funzione  $f$ .  
(b) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

*Soluzione.* Osserviamo che la funzione  $f$  è effettivamente ben definita per ogni  $x \in \mathbb{R}$  in quanto l'argomento della funzione  $\arcsin$  è sempre compreso in  $[-1, 1]$ . Visto che  $f$  è composizione di funzioni continue,  $f$  è a sua volta continua.

Vogliamo poi dimostrare che il limite richiesto non esiste. Per fare questo consideriamo le due successioni:

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^3, \quad y_n = \left(-\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)^3.$$

Chiaramente si ha  $x_n \rightarrow +\infty$  e  $y_n \rightarrow +\infty$ . Inoltre si ha  $f(x_n) = \pi/2$ ,  $f(y_n) = -\pi/2$  e di conseguenza si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$$

dunque il limite di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  non può esistere.

\*\*\*\*\*B\*

Il compito B si risolve in maniera analoga.

\*\*\*\*\*C\*

Nel compito C la funzione in questione è  $f(x) = [\arctan(\sqrt[3]{x})]$ . Osserviamo che la funzione  $[y]$  presenta delle discontinuità quando  $y$  attraversa un valore intero. Visto che  $\arctan \sqrt[3]{x}$  è una funzione strettamente crescente che assume i valori compresi tra  $-\pi/2$  e  $+\pi/2$ , la funzione  $f$  assumerà i valori  $-2, -1, 0, 1$  e avrà delle discontinuità nei punti  $-\tan^3 1, 0$  e  $+\tan^3 1$ . In particolare per ogni  $x \geq \tan^3 1$  la funzione  $f$  assume costantemente il valore 1, e dunque si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

\*\*\*\*\*D\*

Il compito D si risolve in maniera analoga.

3. Si consideri la funzione  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

\*\*\*\*\*A

$$f(x) = x^7 + x^5 + x^3 - 1$$

- (a) Dimostrare che  $f$  è invertibile (iniettiva e surgettiva).  
(b) Determinare i punti in cui  $f^{-1}$  è derivabile.  
(c) Calcolare  $(f^{-1})'(-4)$ .

*Soluzione.* Osserviamo che si ha  $f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2$  che essendo una somma di potenze pari risulta essere una funzione sempre maggiore o uguale a zero:  $f' \geq 0$ . Inoltre si ha  $f(x) = 0$  solo per  $x = 0$ . Dunque la funzione  $f$  è strettamente crescente (in quanto la derivata è non negativa e si annulla in un solo punto) e di conseguenza  $f$  è iniettiva. Per quanto riguarda la suriettività basta osservare che si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

ed essendo  $f$  continua, essa assume tutti i valori reali. Dunque  $f$  è invertibile. Visto che  $f$  è derivabile, la funzione inversa risulta essere derivabile in corrispondenza di tutti i punti tranne l'immagine dei punti in cui  $f$  ha derivata nulla. Abbiamo già osservato che  $f'(x) = 0$  se e solo se  $x = 0$  e dunque  $f^{-1}$  è derivabile dappertutto tranne che in  $f(0) = -1$ .

Per calcolare la derivata di  $f^{-1}$  in  $-4$  bisogna trovare il punto  $x$  tale che  $f(x) = -4$ . Si nota facilmente che si ha  $f(-1) = -4$  e dunque si ha

$$(f^{-1})'(-4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(-4))} = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{7+5+3} = \frac{1}{15}.$$

I compiti B, C e D si risolvono in maniera analoga.

\*\*\*\*\*B

\*\*\*\*\*C

\*\*\*\*\*D