

Analisi Matematica I modulo

Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2006-2007

16 novembre 2006

1. Si consideri la seguente definizione ricorsiva:

*A*****

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n} \\ a_1 = \alpha. \end{cases}$$

- (a) Nel caso $\alpha = -2006$ calcolare (se esiste) il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
(b) Calcolare il limite della successione nel caso $\alpha = \frac{2006}{1004}$.
(c) *Facoltativo*. Dimostrare che l'insieme A dei valori di α per i quali la successione non è ben definita (in quanto si annulla il denominatore) è $A = \{\frac{n+1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

Soluzione. Posto $f(x) = \frac{1}{2-x}$ osserviamo che l'equazione $f(x) = x$ diventa, per $x \neq 2$, $(x-1)^2 = 0$ che ha l'unica soluzione $x = 1$. La disuguaglianza $f(x) \geq x$ è valida per $x < 2$ mentre $f(x) < x$ per $x > 2$. Notiamo anche che la funzione f è crescente per $x < 2$ (e anche per $x > 2$, dunque se $x < 1$ si ha $f(x) < f(1) = 1$). Possiamo quindi dedurre che se $a_n < 1$ allora anche $a_{n+1} < 1$.

Nel caso $a_1 = \alpha = -2006 < 1$ possiamo quindi dedurre (utilizzando l'induzione) che l'intera successione a_n è limitata dall'alto $a_n < 1$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre se $a_n < 1$ sappiamo anche che $a_{n+1} > a_n$ (in quanto per $x < 1$ si ha $f(x) > x$) e dunque la successione è strettamente crescente. Quindi la successione ammette limite finito $a_n \rightarrow a \leq 1$. Passando al limite nell'uguaglianza $a_{n+1} = \frac{1}{2-a_n}$ troviamo $a = \frac{1}{2-a}$ ovvero $f(a) = a$ che ha l'unica soluzione $a = 1$. Abbiamo quindi trovato che nel caso $\alpha = -2006$ si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Se invece $\alpha = \frac{2006}{1004}$ osserviamo che si ha:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha = \frac{2006}{1004} \\ a_2 &= \frac{1}{1-2a_1} = 502 \\ a_3 &= \frac{1}{1-2a_2} = -\frac{1}{500} \end{aligned}$$

ed essendo $a_3 < 1$, per $n \geq 3$ ci riconduciamo al caso precedente, ovvero la successione risulta essere limitata dall'altro dal valore 1 e risulta essere strettamente crescente. Dunque di nuovo si ha $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

Veniamo ora al terzo quesito. Dobbiamo determinare l'insieme A dei valori di α per i quali la successione assume per un certo indice n il valore $a_n = 2$. In tal caso, infatti, essendoci un denominatore che si annulla, il termine successivo a_{n+1} non è ben definito. Chiaramente $2 \in A$ in quanto se $a_1 = \alpha = 2$ già il secondo termine a_2 non è ben definito. Poniamo dunque $\alpha_1 = 2$. Vediamo ora per quale valore α_2 di α si ha $a_2 = 2$. Essendo $a_2 = f(a_1) = f(\alpha)$ si tratta di risolvere l'equazione $f(\alpha) = 2$ ovvero

$$\frac{1}{2-\alpha} = 2$$

che ha come unica soluzione $\alpha_2 = 3/2$. In generale l'equazione $f(x) = y$ ha come soluzione $x = 2 - 1/y$. In effetti la funzione $g(y) = 2 - 1/y$ non è altro che la funzione inversa di $y = f(x)$ (per $x \neq 2$). Dunque il valore α_{n+1} di α per il quale si ha $a_{n+1} = 2$ si ottiene risolvendo l'equazione $f(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$ cioè $\alpha_{n+1} = g(\alpha_n)$. In pratica otteniamo che l'insieme A cercato non è altro che l'insieme $A = \{\alpha_n : n \in \mathbb{N}\}$ dei valori assunti dalla successione definita per ricorrenza:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{n+1} = g(\alpha_n). \end{cases}$$

Il testo ci suggerisce che dovrebbe valere $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$, sarà dunque sufficiente dimostrare per induzione questa uguaglianza. Per $n = 1$ si ha proprio $\alpha_1 = 2$. Supponiamo ora di sapere che $\alpha_n = \frac{n+1}{n}$ per un certo n . Allora osserviamo che si ha

$$\alpha_{n+1} = g(\alpha_n) = 2 - \frac{1}{\alpha_n} = 2 - \frac{n}{n+1} = \frac{2n+2-n}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

che è proprio quello che dovevamo dimostrare.

I compiti B, C e D si risolvevano in maniera analoga. In particolare nel compito B si ha $\lim a_n = 1$ mentre in C e D si ha $\lim a_n = -1$.

*B*****

*C*****

*D*****

2. Calcolare i seguenti limiti:

(a)

$$\frac{(3n)!}{(n!)^3}$$

A*

Soluzione. Appliciamo il criterio del rapporto. Il rapporto tra due termini successivi della successione è infatti:

$$\begin{aligned} \frac{(3(n+1))! (n!)^3}{((n+1)!)^3 (3n)!} &= \frac{(3n+3)!}{(3n)!} \left(\frac{n!}{(n+1)!} \right)^3 \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+2)}{1} \frac{1}{(n+1)^3} \\ &= \frac{27n^3 + (\text{polinomio di grado 2})}{n^3 + (\text{polinomio di grado 2})} \\ &= \frac{27 + (\text{qualcosa che tende a zero})}{1 + (\text{qualcosa che tende a zero})} \rightarrow 27 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Siccome il rapporto tra due termini consecutivi tende a $27 > 1$ possiamo concludere che il limite della successione è $+\infty$.

Il compito B si risolve in maniera analoga, solo che in tal caso il limite del rapporto tende a $1/27$ e quindi la successione data tende a 0.

B*

Nel compito C il limite da calcolare è invece

C*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!}.$$

Anche in questo caso si applica il criterio del rapporto. Il rapporto tra due termini consecutivi è infatti

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{(2(n+1))!}}{(n+1)!} \frac{n!}{\sqrt{(2n)!}} &= \sqrt{\frac{(2n+2)!}{(2n)!} \frac{n!}{(n+1)!}} \\ &= \sqrt{(2n+2)(2n+1)} \frac{1}{n+1} \\ &= \sqrt{\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}} = \sqrt{4 + \frac{6}{n} + \frac{2}{n^2}} \\ &\rightarrow \sqrt{4} = 2 \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Dunque essendo il limite del rapporto $2 > 1$ concludiamo che la successione tende a $+\infty$.

Il compito D si risolve in maniera analoga, solo che in tal caso il limite del rapporto tende a $1/2$ e quindi la successione data tende a 0.

D

****A***

(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^4 + n)^n}{(n^2 - n)^{2n}}$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \frac{(n^4 + n)^n}{(n^2 - n)^{2n}} &= \left(\frac{n^4 + n}{(n^2 - n)^2} \right)^n \\ &= \left(1 + \frac{n^4 + n - (n^4 - 2n^3 + n^2)}{n^4 - 2n^3 + n^2} \right)^n \\ &= \left(1 + \frac{2n^3 - n^2 + n}{n^4 - 2n^3 + n^2} \right)^n \end{aligned}$$

osserviamo ora che la quantità

$$b_n = \frac{2n^3 - n^2 + n}{n^4 - 2n^3 + n^2} = \frac{\frac{2}{n} - 1n^2 + \frac{1}{n^3}}{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

tende a zero per $n \rightarrow \infty$. Dunque cerchiamo di ricondurci al limite notevole $(1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}}$. La successione data è infatti uguale a

$$\left[(1 + b_n)^{\frac{1}{b_n}} \right]^{nb_n}$$

e si ha

$$nb_n = \frac{2n^4 - n^3 + n^2}{n^4 - 2n^3 + n^2} \rightarrow 2.$$

Dunque il limite cercato è e^2 .

Il limite dei testi B, C e D si risolvono in maniera analoga i risultati sono rispettivamente e^2 , e^{-3} e e^{-3} .

****B***

****C***

****D***

****A**

(c)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(\log \frac{1}{n})}{n}$$

Soluzione. Si tratta semplicemente di una successione limitata $\sin(\dots)$ per una infinitesima $1/n$. Il limite è quindi 0.

Il testo B è analogo, il risultato è sempre 0.

****B**

Nel testi C e D il limite da calcolare è invece il seguente:

*****C**

$$\left(1 - \frac{n+1}{n}\right)^n.$$

*****D**

In questo caso si ossrva che la base della potenza tende a 0 mentre l'esponente tende a $+\infty$. Questa non è una forma indeterminata, il risultato del limite è 0.

*****A

3. Dimostrare che la seguente disequazione ha infinite soluzioni $n \in \mathbb{N}$:

*****B

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2006} \geq \frac{2006}{2007}$$

Soluzione. Osserviamo che la quantità al lato sinistro della disequazione tende a 1 per $n \rightarrow \infty$ mentre la quantità al lato destro è strettamente minore di 1. Dunque, per la definizione di limite, scelto $\varepsilon = 1 - 2006/2007 > 0$, sappiamo esistere un indice ν tale che per ogni $n > \nu$ si ha

$$\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{2006} > 1 - \varepsilon = \frac{2006}{2007}.$$

Questo significa, in particolare, che la disequazione data ha infinite soluzioni.

Le versioni C e D sono analoghe alla precedente.

*****C

*****D