

Argomenti svolti durante le esercitazioni

Analisi Matematica III modulo

a.a. 2005-2006

[5.10.2005 (2 ore)]

Funzioni in più variabili. Definizione di limite. Se $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, \dots, f_m)$ allora (senza dimostrazione)

$$\lim_{x \rightarrow \bar{x}} f(x) = \bar{y} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \bar{x}} f_k(x) = \bar{y}_k \quad \forall k = 1, \dots, m.$$

Il limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

non esiste. Ma entrambi i limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

esistono. Si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^6 + y^8}}{x^2 + y^2} = 0.$$

[18.10.2005 (2 ore)]

Il teorema di Schwarz. La funzione

$$f(x, y) = \frac{xy^3 - x^3y}{x^2 + y^2}$$

ha derivate seconde miste diverse. Derivabilità, gradiente. Definizione di differenziabilità.

[19.10.2005 (2 ore)]

riteri per l'esistenza e la non esistenza dei limiti in più variabili.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ non esiste,} & \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{x^2 + |y \sin y|}}{(1 + y^2)e^y + \cos x + 1} = ?, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{|x| + y^2} = 0, & \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^{12}}{x + y} \text{ non esiste.} \end{aligned}$$

Posto

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{se } |y| \leq x^2 \\ \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } |y| > x^2 \end{cases}$$

si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0.$$

Si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{y^2 - |x|}}{\sqrt{|y|}} = 0.$$

[21.10.2005 (1 ora)]

Definizione di differenziabilità tramite operatori lineari. La funzione

$$\frac{xy}{x^2 + y^2}$$

estesa a 0 nell'origine, risulta essere derivabile ma non differenziabile in $(0, 0)$.

[26.10.2005 (2 ore)]

Una funzione differenziabile è continua. Teorema del differenziale. Studio delle derivate prime e seconde di

$$f(x, y) = \frac{x^4 - x^2 y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0.$$

[9.11.2005 (2 ore)]

Determinare le derivate parziali, il gradiente e le derivate direzionali della funzione $f(x, y) = xe^{2y}$. Studiare la continuità e determinare le derivate direzionali della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin(2 \arctg \frac{y}{x}) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Sia $A = \{(x, y) : |y| \leq |x|^3\}$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y+x^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{se } (x, y) \in A \setminus \{(0, 0)\} \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostrare che per ogni $\beta \in \mathbb{R}$ si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - f(0, 0) - \beta y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Possiamo parlare della differenziabilità di f in $(0, 0)$?

_____ [11.11.2005 (1 ora)]

Teorema di Weierstrass. Topologia di $\mathbb{R}^n$. Massimi e minimi.

_____ [23.11.2005 (2 ore)]

Esercizi su massimi e minimi assoluti.

_____ [30.11.2005 (2 ore)]

Massimi e minimi con Hessiano nullo. Videoproiezione.

_____ [2.12.2005 (1 ora)]

Convergenza uniforme.

_____ [7.12.2005 (2 ore)]

Convergenza totale e puntuale di serie di funzioni.