

Esercizi sullo studio qualitativo degli insiemi di livello

Esercitazioni di Analisi Matematica IV modulo

10 aprile 2025

1. Disegnare gli insiemi di livello della funzione

$$f(x, y) = (\log x)^2 + y^2.$$

2. Disegnare gli insiemi di livello della funzione

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Per quali livelli z l'insieme di livello $\{(x, y) : f(x, y) = z\}$ è connesso?

3. Disegnare gli insiemi di livello della funzione

$$f(x, y) = y^2 - \cos x.$$

In particolare:

- (a) si osservi che la funzione f è periodica rispetto alla variabile x , cosa significa questo per gli insiemi di livello?
- (b) determinare e disegnare con precisione i livelli critici;
- (c) determinare, al variare di z il numero di componenti connesse dell'insieme di livello $\{f = z\}$.

4. Disegnare l'insieme

$$Z = \{(x, y) : y^3 - x^2y - x = 0\}.$$

Al variare di x determinare il numero di elementi dell'insieme $Z_x = \{y : y^3 - x^2y - x = 0\}$.

5. (a) Si consideri la funzione

$$g(x, y) = 2x^3y^2 + 2x + y.$$

- i. Dimostrare che esiste una funzione $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, di classe \mathcal{C}^1 tale che si ha $\{(x, y) : f(x, y) = 0\} = \{(x, y) : x = h(y)\}$;
- ii. dimostrare che $h(y) \rightarrow 0$ per $y \rightarrow \pm\infty$;
- iii. determinare i punti di massimo e minimo della funzione h ;

(b) Disegnare gli insiemi di livello $\{f(x, y) = z\}$ della funzione

$$f(x, y) = x^2 + \arctan(xy)$$

In particolare:

- i. dimostrare che ogni insieme di livello è simmetrico rispetto all'origine;
- ii. al variare del livello z dire se l'insieme di livello interseca l'asse delle x ;
- iii. dimostrare che ogni insieme di livello non critico è l'unione di due grafici di funzione;
- iv. dimostrare che tali grafici hanno due asintoti verticali;
- v. determinare l'equazione degli asintoti verticali in funzione del livello z .

6. Si consideri la funzione

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 3x^2y + y^2.$$

- (a) dimostrare che $f(x, y) \rightarrow +\infty$ per $x^2 + y^2 \rightarrow +\infty$;
- (b) dimostrare che ogni insieme di livello di f è limitato;
- (c) tra tutti i punti dell'insieme di livello $\{f(x, y) = 2\}$ determinare quello/i per cui il valore di y è massimo.