Analisi Matematica III modulo
Soluzioni prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

17 gennaio 2006

1. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   (a) Studiare la continuità e la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$.
   (b) Determinare, se esistono, i valori massimo e minimo assunti da f sul cerchio unitario $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$.

   Soluzione.

   (a) Mostriamo innanzitutto che la funzione è continua. Infatti si ha
$$\left|\frac{x^2y - y^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{|x^2-y^2||y|}{x^2+y^2} \leq |y| \to 0 \qquad \text{per } (x,y) \to 0.$$
   Per studiare la differenziabilità di f calcoliamo innanzitutto le derivate parziali.
$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$
$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-y^3}{y^3} = -1.$$
   Perché la funziona sia differenziabile deve esistere finito il seguente limite:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{x^2y-y^3}{x^2+y^2} + y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim \frac{x^2y - y^3 + x^2y + y^3}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \lim \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$
   Ma tale limite non esiste, infatti per $x = 0$ la funzione vale 0, mentre per $x = y$ la funzione vale $1/\sqrt{2}$. Concludiamo quindi che la funzione $f(x,y)$ non è differenziabile nel punto $(0,0)$.

   (b) Per determinare i punti di massimo e minimo per f sul cerchio unitario, cerchiamo innanzitutto eventuali punti critici. Abbiamo già osservato che $f_y(0,0) = -1$ e quindi $(0,0)$ non è un punto critico. Per $(x,y) \neq (0,0)$ si ha
$$f_x = \frac{2xy(x^2+y^2) - 2x(x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y = \frac{(x^2-3y^2)(x^2+y^2) - 2y(x^2y-y^3)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2}.$$

È facile osservare che f_x si annulla solo se $x = 0$ oppure $y = 0$, e in entrambi i casi il numeratore di f_y si annulla solo se $(x, y) = (0, 0)$ dove però sappiamo essere $f_y \neq 0$. Dunque non ci sono punti critici. Il massimo e il minimo della funzione (che devono esistere per il teorema di Weierstrass) si trovano dunque sulla frontiera $x^2 + y^2 = 1$.

Parametrizziamo la circonferenza con la curva $(\cos t, \sin t)$ e studiamo la funzione

$$g(t) = f(\cos t, \sin t) = \cos^2 t \sin t - \sin^3 t.$$

Si ha

$$\begin{aligned} g'(t) &= -2\cos t \sin^2 t + \cos^3 t - 3\sin^2 t \cos t \\ &= \cos t\,(\cos^2 t - 5\sin^2 t) = \cos t\,(1 - 6\sin^2 t) \end{aligned}$$

che si annulla quando $\cos t = 0$, cioè nei punti $(0, \pm 1)$ e quando $\sin^2 t = 1/6$ ovvero nei punti $(\pm\sqrt{5/6}, \pm\sqrt{1/6})$. Valutando la funzione nei 6 punti trovati

$$\begin{aligned} f(0, \pm 1) &= \mp 1, \\ f(\pm\sqrt{5/6}, \sqrt{1/6}) &= \frac{2}{3\sqrt{6}}, \\ f(\pm\sqrt{5/6}, -\sqrt{1/6}) &= -\frac{2}{3\sqrt{6}} \end{aligned}$$

concludiamo quindi che il valore massimo assunto da f è 1 mentre il minimo è -1.

2. Si consideri la serie di funzioni

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (x-k)^2}.$$

(a) Dire se c'è convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$.

(b) Dire se c'è convergenza totale sugli intervalli limitati $[a, b]$.

(c) Dire se c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

Soluzione.

(a) Posto

$$f_k(x) = \frac{1}{k + (x-k)^2}$$

osserviamo che $f_k(x)$ sono funzioni positive, e assumono valore massimo quando il denominatore assume valore minimo, cioè quando $(x-k)^2 = 0$ ovvero per $x = k$. Il valore massimo assunto è

$$M_k = f_k(k) = \frac{1}{k} \qquad \text{ed essendo} \qquad \sum_k \frac{1}{k} = +\infty$$

concludiamo che la serie data non converge totalmente su tutto $\mathbb{R}$.

(b) Se ci restringiamo all'intervallo $[a, b]$ la funzione $f_k(x)$, per $k \geq b$ risulta essere crescente su $[a, b]$ e dunque avrà massimo

$$M_k = f_k(b) = \frac{1}{k + (b-k)^2}.$$

La serie $\sum_k M_k$ è asintoticamente equivalente alla serie $\sum_k \frac{1}{k^2}$ e quindi è convergente. Concludiamo quindi che la serie converge totalmente sugli intervalli limitati.

(c) Perché ci sia convergenza uniforme su $\mathbb{R}$ deve essere zero il limite seguente:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_x \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{N-1} f_k(x) \right| = \lim_{N\to\infty} \sup_x \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k+(x-k)^2}.$$

Si può osservare che valgono le seguenti stime[1]:

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k+(x-k)^2} &\le \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{N+(x-k)^2} \le 2\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{N+j^2} \\ &\le 2\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{N+y^2}\,dy = \frac{2}{\sqrt{N}} \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{N}} \right]_{-1}^{\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{N}} \left[\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{N}} \right] \to 0 \qquad \text{per } N \to \infty.\end{aligned}$$

Dunque la serie converge uniformemente su tutto $\mathbb{R}$.

3. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che

$$|x| = 1 \quad \Rightarrow \quad (\nabla f(x), x) > 0.$$

Dimostrare che il sistema

$$\nabla f(x) = 0$$

ammette almeno una soluzione.

Soluzione. Consideriamo la funzione ristretta al cerchio unitario $D = \{x\colon |x| \le 1\}$. Fissato $x \in \partial D$ (ovvero $|x| = 1$) consideriamo la funzione $g(t) = f(tx)$ per $t \in [0,1]$. Osserviamo che si ha $g'(t) = (\nabla f(tx), x)$ in particolare $g'(1) = (\nabla f(x), x) > 0$. Questo significa per qualche $t < 1$ si ha $g(t) < g(1)$ ovvero $f(tx) < f(x)$. Di conseguenza il punto x non può essere un punto di minimo per f su D e questo è vero per ogni $x \in \partial D$. Siccome però la funzione f è continua su D, per il teorema di Weierstrass deve esistere un minimo $x_0 \in D$. Se x_0 non sta sul bordo ∂D ne consegue che x_0 è un punto interno e quindi $\nabla f(x_0) = 0$. Dunque x_0 è la soluzione cercata. xxx

Modifiche

26 novembre 2007 aggiunta una spiegazione nella soluzione del secondo esercizio

[1] Nella seconda disuguaglianza si è usato il fatto che $(x-k)^2 \ge \lfloor x-k \rfloor^2$ e di conseguenza si possono scalare gli indici ponendo $j = \lfloor x-k \rfloor$.