Analisi Matematica III modulo
Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

17 gennaio 2006

1. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y - y^3}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
   (a) Studiare la continuità e la differenziabilità di f nel punto $(0,0)$.
   (b) Determinare, se esistono, i valori massimo e minimo assunti da f sul cerchio unitario $D = \{(x,y)\colon x^2+y^2 \leq 1\}$.

2. Si consideri la serie di funzioni
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + (x-k)^2}.$$
   (a) Dire se c'è convergenza totale su tutto $\mathbb{R}$.
   (b) Dire se c'è convergenza totale sugli intervalli limitati $[a,b]$.
   (c) Dire se c'è convergenza uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

3. Sia $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e tale che
$$|x| = 1 \quad \Rightarrow \quad (\nabla f(x), x) > 0.$$
   Dimostrare che il sistema
$$\nabla f(x) = 0$$
   ammette almeno una soluzione.

   Suggerimento: dimostrare che la funzione ristretta alla palla unitaria non ammette minimi sul bordo.

Nota (18.1.2006): nel testo del secondo esercizio c'era erroneamente scritto $\sum_{k=0}^{\infty}$ invece che $\sum_{k=1}^{\infty}$.