# Analisi Matematica I e II modulo
# Soluzioni prova scritta n. 4/I e n. 2/II

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

11 luglio 2005

1. (a) Determinare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n^{1+\sin 7}} \\ a_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$
   (b) Determinare, se esiste, il limite della seguente successione definita per ricorrenza
$$\begin{cases} a_{n+1} = \sqrt{a_n^{1+\sin n}} \\ a_1 = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

   *Soluzione.* Per quanto riguarda il punto (a) osserviamo che $a_{n+1} = a_n^\alpha$ dove $\alpha = \frac{1+\sin 7}{2}$ è un numero strettamente compreso tra 0 e 1. Si verifica quindi facilmente che $0 \leq a_n \leq 1$ per ogni $n$ e che $a_n$ è crescente. Dunque la successione converge ad un valore $\ell \in [1/2, 1]$. Passando al limite nei due lati dell'uguaglianza $a_{n+1} = a_n^\alpha$ si ottiene dunque $\ell = \ell^\alpha$. Si conclude quindi che $\ell = 1$.

   Il punto (b) è più complicato ma si risolve in maniera analoga. Posto $f_n(x) = \sqrt{x^{1+\sin n}}$ si ha $a_{n+1} = f_n(a_n)$. Notiamo innanzitutto che $a_1 > 0$ e che se $x > 0$ allora $f_n(x) > 0$. Questo ci permette di concludere che la successione è ben definita, ed è a termini positivi. Notiamo poi che $f_n(x) = x^{\alpha_n}$ dove $\alpha_n = \frac{1+\sin n}{2}$ Essendo $\sin n \in [-1, 1]$ si osserva che $\alpha_n \in [0, 1]$. Essendo $\alpha_n \geq 0$ sappiamo che se $x \in [0, 1]$ allora $f_n(x) \in [0, 1]$; essendo $a_1 \in [0, 1]$ deduciamo, per induzione, che $a_n \in [0, 1]$ per ogni $n \geq 1$. Osserviamo anche essendo $\alpha_n \geq 1$ si ha $f_n(x) \geq x$ per ogni $x \in [0, 1]$ e dunque $a_{n+1} \geq a_n$. questo significa che la successione $a_n$ è crescente. Essendo $a_n$ crescente e limitata, la successione converge: $a_n \to \ell$.

   Notiamo ora che risolvendo l'equazione $a_{n+1} = \sqrt{a_n^{1+\sin n}}$ rispetto a $\sin n$ si ottiene
$$\sin n = \frac{2 \log a_{n+1}}{\log a_n} - 1. \tag{1}$$

Ricordando che $a_n \to \ell$ e che $a_{n+1} \to \ell$, se fosse $\ell \neq 1$ si avrebbe

$$\lim_{n\to\infty} \sin n = \lim_{n\to\infty} \frac{2\log a_{n+1}}{\log a_n} - 1 = \frac{2\log \ell}{\log \ell} - 1$$

che è assurdo in quanto la successione $\sin n$ non ammette limite. Dunque l'unica possibilità è che $\ell = 1$ (notiamo che in questo caso non c'è contraddizione in quanto il rapporto in (1) risulta essere una forma indeterminata).

In conclusione $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

2. Si consideri la funzione $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + \operatorname{arctg} x.$$

Determinare gli intervalli di monotonia e l'insieme degli zeri di $f$.

*Soluzione.* Si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-2x}{(1+x^2)(x-1)^2}$$

da cui si nota che $f'(x) \geq 0$ per $x \leq 0$ e $f'(x) \leq 0$ per $x \geq 0$. Ricordando che nel punto $x = 1$ la funzione non è definita, si deduce che la funzione è strettamente crescente sull'intervallo $(-\infty, 0]$ ed è strettamente decrescente sugli intervalli $[0, 1)$ e $(1, +\infty)$. Per $x < 1$ la funzione ammette massimo in 0 e si ha $f(0) = -1$; dunque $f(x) \leq -1$ se $x < 1$. Per $x > 1$ notiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

ed essendo la funzione decrescente concludiamo che $f(x) > \frac{\pi}{2}$ (per $x > 1$). In particolare la funzione non si annulla mai, e quindi l'insieme degli zeri è vuoto.

3. Calcolare

$$3\int_0^1 (x+x^2)\operatorname{arctg}(x^2)\,dx + \int_0^1 \frac{2}{1+x^4}\,dx.$$

*Soluzione.* Si ha

$$\begin{aligned}
&3\int_0^1 (x+x^2)\operatorname{arctg} x^2\,dx \\
&= 3\left[\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\operatorname{arctg} x^2\right]_0^1 - 3\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)\frac{2x}{1+x^4}\,dx \\
&= 3\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\frac{\pi}{4}\right] - \int_0^1 \frac{3x^3+2x^4}{1+x^4}\,dx = \frac{5}{8}\pi - 2 - \int_0^1 \frac{3x^3-2}{1+x^4}\,dx
\end{aligned}$$

Dunque

$$
\begin{aligned}
&3\int_0^1 (x+x^2)\operatorname{arctg}(x^2)\,dx - \int_0^1 \frac{2}{1+x^4}\,dx \\
&= \frac{5}{8}\pi - 2 - \int_0^1 \frac{3x^3-2}{1+x^4}\,dx - \int_0^1 \frac{2}{1+x^4}\,dx \\
&= \frac{5}{8}\pi - 2 - \int_0^1 \frac{3x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{5}{8}\pi - 2 - \frac{3}{4}\left[\log(1+x^4)\right]_0^1 \\
&= \frac{5}{8}\pi - 2 + \frac{3}{4}\log 2.
\end{aligned}
$$

4. (a) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\arcsin\frac{1}{k}.$$

(b) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty}\left[n\pi - 2\sum_{k=1}^{n}\arccos\frac{1}{k}\right].$$

*Soluzione.* Si tratta di determinare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{k}$. Per il criterio degli infinitesimi, visto che

$$\lim_{k\to\infty} k\arcsin\frac{1}{k} = 1$$

concludiamo che la serie presa in considerazione ha lo stesso carattere della serie armonica, e dunque è divergente. Di conseguenza il limite cercato è $+\infty$.

Per calcolare il secondo limite notiamo che

$$n\pi - 2\sum_{k=1}^{n}\arccos\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}\pi - \sum_{k=1}^{n}2\arccos\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n}(\pi - 2\arccos\frac{1}{k}).$$

Dunque si tratta di determinare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\pi - 2\arccos\frac{1}{k}\right)$. Si verifica facilmente che tale serie ha termini positivi ed essendo[1]

$$\lim_{k\to\infty} k(\pi - 2\arccos\frac{1}{k}) = 2$$

per il criterio degli infinitesimi concludiamo che la serie è divergente. Dunque il limite cercato è $+\infty$.

[1]questo limite può essere calcolato considerando il limite di funzione $\lim_{x\to 0}\frac{\pi - 2\arccos x}{x}$ e applicando il Teorema de l'Hôpital