Analisi Matematica I e II modulo
Soluzioni prova scritta

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

10 giugno 2005

1. Determinare gli intervalli di monotonia della funzione
$$f(x) = \sin x - \cos x.$$

   Soluzione. Si ha $f'(x) = \cos x + \sin x$ e dunque $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\sin x \geq -\cos x$ ovvero $x \in [-\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi] + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Dunque f è strettamente crescente sugli intervalli del tipo $[2k\pi - \frac{1}{4}\pi, 2k\pi + \frac{3}{4}\pi]$ con $k \in \mathbb{Z}$. Analogamente si trova che f è strettamente decrescente sugli intervalli $[2k\pi + \frac{3}{4}\pi, 2k\pi + \frac{7}{4}\pi]$.

2. Si consideri la funzione $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da
$$g(y) = y - \operatorname{arctg}(y-1) - 1.$$

   (a) Si dimostri che g è bigettiva e si chiami $f = g^{-1}$ la funzione inversa di g.

   (b) Dire in quali punti la funzione f risulta essere derivabile.

   (c) Dimostrare che f è strettamente crescente.

   (d) Sia $y = m(\bar{x})\,x + q(\bar{x})$ l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$. Calcolare i seguenti limiti
$$\lim_{\bar{x}\to+\infty} m(\bar{x}), \qquad \lim_{\bar{x}\to+\infty} q(\bar{x}).$$

   Soluzione. Si ha
$$g'(y) = 1 - \frac{1}{1+(y-1)^2}.$$

   Notiamo che $1 + (y-1)^2 \geq 0$ e dunque $g'(y) \geq 0$ per ogni $y \in \mathbb{R}$, inoltre $g'(y)$ si annulla solamente quando $(y-1)^2 = 0$ ovvero per $y = 1$. Dunque g è strettamente crescente sugli intervalli $[0, +\infty)$ e $(-\infty, 0]$ (al cui interno la derivata è strettamente positiva) e di conseguenza è strettamente crescente su tutto $\mathbb{R}$. Dunque g è iniettiva.

   Si ha inoltre
$$\lim_{y\to+\infty} g(y) = +\infty, \qquad \lim_{y\to-\infty} g(y) = -\infty.$$

   Applicando il teorema degli zeri si dimostra quindi facilmente che g assume tutti i valori di $\mathbb{R}$ ovvero è surgettiva.

   Essendo bigettiva g è invertibile e la sua inversa f è definita su tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, dal teorema di derivazione della funzione inversa sappiamo che $f(x)$ è derivabile nei punti x in cui $g'(f(x)) \neq 0$. Siccome g è strettamente crescente anche la sua inversa f lo è. Infatti
$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

La retta tangente nel punto $(\bar{x}, f(\bar{x}))$ al grafico di f ha equazione

$$y = f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + f(\bar{x}) = \frac{1}{g'(f(\bar{x}))}(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$$

da cui

$$m(\bar{x}) = \frac{1}{g'(f(\bar{x}))}, \qquad q(\bar{x}) = f(\bar{x}) - \frac{\bar{x}}{g'(f(\bar{x}))}$$

Notiamo che

$$\lim_{\bar{x}\to+\infty} f(\bar{x}) = +\infty$$

e dunque

$$\lim_{x\to+\infty} m(x) = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{g'(y)} = 1$$

mentre

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} q(x) &= \lim_{y\to+\infty} y - \frac{g(y)}{g'(y)} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{-y + (1 + (y-1)^2)(\operatorname{arctg}(y-1) + 1)}{(y-1)^2} \\
&= 1 + \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

3. Si consideri la funzione $f\colon [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x} e^{-t^4}\, dt.$$

Dire se f

(a) è continua;
(b) è uniformemente continua;
(c) è lipschitziana;
(d) è derivabile.

Soluzione. Notiamo che la funzione e^{-x^4} è continua su tutto $\mathbb{R}$ e quindi è integrabile su ogni intervallo limitato di $\mathbb{R}$. Dunque f è ben definita. Inoltre considerando la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^4}\, dt$$

dal teorema fondamentale del calcolo sappiamo che F è derivabile e $F'(x) = e^{-t^4}$. Inoltre possiamo scrivere

$$f(x) = F(x) - F(\sqrt{x}).$$

Visto che F è continua e $\sqrt{x}$ è continua, anche f è continua essendo somma e composizione di funzioni continue. Inoltre $\sqrt{x}$ è derivabile per $x > 0$, e F è derivabile per ogni x, dunque f è derivabile per $x > 0$ e si ha

$$f'(x) = F'(x) - \frac{1}{2\sqrt{x}} F'(\sqrt{x}) = e^{-x^4} - \frac{e^{-x^2}}{2\sqrt{x}}.$$

Notiamo che $\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty$ e dunque applicando il teorema de L'Hôpital al rapporto incrementale di f in 0, si trova che f non è derivabile in 0. Complessivamente f non è dunque una funzione derivabile. Inoltre la derivata (dove esiste) non è limitata e dunque f non è neanche lipschitziana.

Notiamo però che $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Questo significa che la derivata di f è limitata sull'intervallo $[0, +\infty)$. Dunque su tale intervallo la funzione è lipschitziana e anche uniformemente continua. D'altra parte f è continua e dunque è uniformemente continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$. Concludiamo quindi che f è uniformemente continua su tutto il suo dominio $[0, +\infty)$.

4. Determinare il carattere della seguente serie numerica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{k^3} - e^k}{2^k}.$$

Soluzione. Sappiamo che la successione notevole $(1 + 1/k)^k$ converge crescendo ad e, dunque si ha $(1 + 1/k)^k < e$ per ogni k. In particolare la serie data è a termini negativi. Studiamo dunque la serie con i termini cambiati di segno, visto che cambiando segno a tutti i termini il carattere della serie non cambia.

Ricordando gli sviluppi di Taylor per $x \to 0$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \exp(x) = 1 + x + o(x),$$

si ha, per $k \to +\infty$,

$$\begin{aligned}
&\frac{e^k - \left(1+\frac{1}{k^2}\right)^{k^3}}{2^k} = e^k \frac{1 - \exp\left(k^3 \log(1+\frac{1}{k^2}) - k\right)}{2^k} \\
&= (e/2)^k \left\{1 - \exp\left[k^3\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{2k^4} + o\left(\frac{1}{k^4}\right)\right) - k\right]\right\} \\
&= (e/2)^k \left\{1 - \exp\left[-\frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right]\right\} = (e/2)^k \left\{\frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right)\right\} \\
&\to +\infty \qquad \text{per } k \to +\infty.
\end{aligned}$$

Dunque la serie non è infinitesima, ed essendo a termini negativi diverge a $-\infty$.