Analisi Matematica II modulo
Soluzioni della prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

30 maggio 2005

1. Calcolare il seguente limite $\boxed{\texttt{A*****}}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{1+x^3} - \sin x}{\cos\frac{x}{1+x^2} - \cos x}.$$

Soluzione. Ricordiamo i seguenti sviluppi di Taylor:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \qquad \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + 2x^2 + o(x^2).$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{x}{1+x^3} - \sin x = \\
&= \frac{x}{1+x^3} - \frac{1}{6}\frac{x^3}{(1+x^3)^3} + o\left(\frac{x}{1+x^3}\right)^4 - (x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)) \\
&= x(1 - x^3 + o(x^5)) - \frac{1}{6}x^3(1 - o(x^2)) + o(x^4) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\
&= x - x^4 + o(x^6) - \frac{1}{6}x^3 + o(x^5) + o(x^4) - x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \\
&= -x^4 + o(x^4).
\end{aligned}$$

E inoltre

$$
\begin{aligned}
&\cos\frac{x}{1+x^2} - \cos x = \\
&= 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{(1+x^2)^2} + \frac{1}{24}\frac{x^4}{(1+x^2)^4} + o\left(\frac{x^4}{(1+x^2)^4}\right) \\
&\quad - (1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2}(1 - x^2 + o(x^3))^2 + \frac{x^4}{24}(1+o(1))^4 + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\
&= 1 - \frac{x^2}{2}(1 - 2x^2 + x^4 + o(x^4)) + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5) \\
&= x^4 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

Dunque si conclude

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{1+x^3} - \sin x}{\cos\frac{x}{1+x^2} - \cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1+o(1)}{1+o(1)} = -1.$$

Calcolare il seguente limite $\boxed{\texttt{B*****}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x) - \sin(1-\cos x)}{1 - e^{\sin x} - \sin(1-e^x)}.$$

Soluzione. Ricordiamo i seguenti sviluppi di Taylor:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4), \qquad 1 - \cos x = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4),$$

$$1 - e^x = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{24}x^4 + o(x^4).$$

Dunque si ha

$$
\begin{aligned}
&1 - \cos(\sin x) - \sin(1-\cos x) = \\
&= \frac{1}{2}(\sin x)^2 - \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o(\sin x)^4 - (1-\cos x) + o(1-\cos x)^2 \\
&= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))^2 - \frac{1}{24}(x + o(x^2))^4 + o(x^4) \\
&\quad - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \\
&= \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4)) - \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&= -\frac{1}{6}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}
$$

D'altra parte

$$
\begin{aligned}
&1 - e^{\sin x} - \sin(1 - e^x) = \\
&= -\sin x - \frac{1}{2}(\sin x)^2 - \frac{1}{6}(\sin x)^3 - \frac{1}{24}(\sin x)^4 + o(\sin x)^4 \\
&\quad - (1 - e^x) + \frac{1}{6}(1 - e^x)^3 + o(1 - e^x)^4 \\
&= -x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{1}{2}(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4))^2 \\
&\quad - \frac{1}{6}(x + o(x^2))^3 - \frac{1}{24}(x + o(x^2))^4 + o(x^4) \\
&\quad x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) + \frac{1}{6}(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2))^3 + o(x^4) \\
&= -x + \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o(x^4) - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \frac{x^4}{24} + o(x^4) \\
&\quad + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
&= -\frac{1}{12}x^4 + o(x^4).
\end{aligned}
$$

Di conseguenza si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(\sin x) - \sin(1 - \cos x)}{1 - e^{\sin x} - \sin(1 - e^x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{6} + o(1)}{-\frac{1}{12} + o(1)} = 2.
\end{aligned}
$$

Calcolare il seguente limite C*****

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\cos \frac{x}{1+x^2} - \cos x}{1 - \cos(\sin x) - \sin(1 - \cos x)}.
$$

Soluzione. Per quanto visto nei due esercizi precedenti si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\cos \frac{x}{1+x^2} - \cos x}{1 - \cos(\sin x) - \sin(1 - \cos x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^4 + o(x^4)}{-\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{6} + o(1)} = -6.
\end{aligned}
$$

Calcolare il seguente limite D*****

$$
\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{\sin x} - \sin(1 - e^x)}{\sin \frac{x}{1+x^3} - \sin x}.
$$

Soluzione. Per quanto visto nei due esercizi precedenti si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{\sin x} - \sin(1-e^x)}{\sin \frac{x}{1+x^3} - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12}x^4 + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{12} + o(1)}{-1 + o(1)} = \frac{1}{12}.$$

2. Calcolare $\boxed{\texttt{***A**}}$

$$\int_0^2 (1-x)\, e^{x^4-4x^3+4x^2}\, dx.$$

Soluzione. Tramite il cambio di variabili $y = x - 1$, $dx = dy$, si ottiene

$$\int_0^2 (1-x)\, e^{x^4-4x^3+4x^2}\, dx \int_0^2 (1-x)\, e^{x^2(x-2)^2}\, dx = \int_{-1}^1 -y\, e^{(y+1)^2(y-1)^2}\, dx.$$

Visto che la funzione integranda $f(y) = -ye^{(y^2-1)^2}$ è dispari, mentre l'intervallo di integrazione è simmetrico, il risultato deve necessariamente essere 0.

Calcolare $\boxed{\texttt{***B**}}$

$$\int_0^2 (2x^3 + 4x)\, e^{1+x^2}\, dx.$$

Soluzione. Si tratta di integrare per parti:

$$\int_0^2 (2x^3 + 4x)\, e^{1+x^2}\, dx = \int_0^2 2x(x^2+2)\, e^{1+x^2}\, dx$$
$$= \Big[(x^2+2)e^{1+x^2}\Big]_0^2 - \int_0^2 2xe^{1+x^2}\, dx$$
$$= \Big[(x^2+2)e^{1+x^2}\Big]_0^2 - \Big[e^{1+x^2}\Big]_0^2 = 5e^5 - e.$$

Calcolare $\boxed{\texttt{***C**}}$

$$\int_0^1 (3x^5 + 6x^2)\, e^{(x^3)}\, dx.$$

Soluzione. Si tratta di integrare per parti:

$$\int_0^1 (3x^5 + 6x^2)\, e^{x^3}\, dx = \int_0^1 3x^2(x^3+2)\, e^{x^3}\, dx$$
$$= \Big[(x^3+2)e^{x^3}\Big]_0^1 - \int_0^1 3x^2e^{x^3}\, dx$$
$$= \Big[(x^3+2)e^{x^3}\Big]_0^1 - \Big[e^{x^3}\Big]_0^1 = 2e - 2.$$

Calcolare $\boxed{\texttt{***D**}}$

$$\int_0^1 (1-2x)\, e^{x^4-2x^3+x^2}\, dx.$$

Soluzione. Tramite il cambio di variabili $y = x - 1/2$, $dx = dy$, di ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 (1-2x)\, e^{x^4-2x^3+x^2}\, dx &= \int_0^1 (1-2x)\, e^{x^2(x-1)^2}\, dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} - 2y\, e^{(y+\frac{1}{2})^2(y-\frac{1}{/}2)^2}\, dy.\end{aligned}$$

Visto che la funzione integranda $f(y) = -2y\, e^{(y^2-\frac{1}{4})^2}$ è dispari, mentre l'intervallo di integrazione è simmetrico, il risultato deve necessariamente essere 0.

3. Determinare il carattere della seguente serie $\boxed{\texttt{****A*}}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n - 2}.$$

Soluzione. Applichiamo il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}\frac{\frac{(n+1)^{\sqrt{n+1}}}{2^{n+1}-2}}{\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n-2}} &= \frac{2^n-2}{2^{n+1}-2} \cdot \frac{(n+1)^{\sqrt{n}} \cdot (n+1)^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}}{n^{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{1-\frac{2}{2^n}}{2-\frac{2}{2^n}} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}} \cdot (n+1)^{\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}}.\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che il primo fattore di quest'ultimo prodotto tende ad $1/2$ mentre gli altri due fattori tendono ad 1. Dunque per il criterio del rapporto possiamo concludere che la serie data è divergente.

Determinare il carattere della seguente serie $\boxed{\texttt{****B*}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 2}{n^{\sqrt{n}}}.$$

Soluzione. Notiamo che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \exp(n \log 2 - \sqrt{n} \log n) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(n\left(\log 2 - \frac{\log n}{n}\right)\right) = +\infty$$

mentre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n - 2}{2^n} = 1.$$

Dunque il termine generico della serie

$$\frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n - 2} = \frac{n^{\sqrt{n}}}{2^n} \frac{2^n}{2^n - 2}$$

non è infinitesimo. Visto che la serie ha termini positivi, necessariamente è divergente.

Determinare il carattere della seguente serie ****C*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n^{2n}}.$$

Soluzione. Applichiamo il criterio del rapporto

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)^{2(n+1)}}}{\frac{(2n)!}{n^{2n}}} &= \frac{(2n+2)!}{(2n)!} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right)^{2n} \to 4e^{-2} < 1. \end{aligned}$$

Dunque la serie data converge.

Determinare il carattere della seguente serie ****D*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n)!}.$$

Soluzione. In maniera analoga al caso precedente si ottiene che il rapporto tra i termini consecutivi della serie tende a $e^2/4 > 1$, e dunque la serie diverge.

4. *(facoltativo)* Dimostrare che ******

$$\int_4^{16} \frac{1}{\log x}\, dx > \int_2^4 \frac{1}{\log x}\, dx.$$

Soluzione. Posto

$$F(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\, dt$$

e posto

$$f(x) = F(x^2) - F(x)$$

si tratta di dimostrare che $f(4) > f(2)$. Per far questo è sufficiente mostrare che f è strettamente crescente. Ricordando poi che $F'(x) = 1/\log x$ si ottiene

$$f'(x) = 2xF'(x^2) - F'(x) = \frac{2x}{\log x^2} - \frac{1}{\log x} = \frac{x-1}{\log x}$$

e dunque $f'(x) > 0$ per $x > 1$. In particolare f è crescente sull'intervallo $[2, 16]$ come volevasi dimostrare.