# Analisi Matematica I modulo
# Soluzioni prova scritta preliminare n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2004-2005

29 novembre 2004

1. (a) Calcolare il seguente limite: **A*****

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+\log n)^n}{n^n}.$$

*Soluzione.* Si ha

$$\frac{(n+\log n)^n}{n^n} = \left(\frac{n+\log n}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{\log n}{n}\right)^{\frac{n}{\log n}}\right]^{\overset{\overset{+\infty}{\uparrow}}{\log n}}_{\overset{\uparrow}{e}} \to +\infty.$$

(b) Calcolare il seguente limite: **B*****

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{e^n}{1+e^n}\right)^{\sqrt{n}}.$$

*Soluzione.* Si ha

$$\left(\frac{e^n}{1+e^n}\right)^{\sqrt{n}} = \left(\frac{1+e^n-1}{1+e^n}\right)^{\sqrt{n}} = \left[\left(1-\frac{1}{1+e^n}\right)^{-(1+e^n)}\right]^{-\frac{\sqrt{n}}{1+e^n}\to 0}_{\overset{\uparrow}{e}} \to 1$$

(c) Calcolare il seguente limite: **C*****

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt[4]{n}}.$$

*Soluzione.*

$$\left(\frac{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt[4]{n}} = \left[\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)^{-\sqrt[4]{n}}\right]^{-1} \to e^{-1}$$

(d) Calcolare il seguente limite: **D*****

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+n^2}\right)^n.$$

*Soluzione.*

$$\begin{aligned}\left(\frac{n^2}{n+n^2}\right)^n &= \left(\frac{n}{1+n}\right)^n = \left(\frac{1+n-1}{1+n}\right)^n \\ &= \left[\left(1-\frac{1}{1+n}\right)^{-(n+1)}\right]^{-\frac{n}{n+1}} \to e^{-1}\end{aligned}$$

***A****

2. (a) Si consideri la successione

$$a_n = \cos\frac{7\pi n(1+n^2)}{3n^2}.$$

Determinare i possibili limiti delle estratte convergenti (ovvero trovare l'insieme dei valori limite).

*Soluzione.* Notiamo che si ha

$$\frac{7\pi n(1+n^2)}{3n^2} = \frac{7}{3}\pi n + \frac{7\pi}{n} = \frac{7}{3}\pi n + \varepsilon_n$$

dove $\varepsilon_n = 7\pi/n$ è una successione che tende a zero. Consideriamo le sei diverse successioni di indici

$$n_k = 6k + j$$

con $j = 0, \dots, 5$. Le corrispondenti estratte $a_{n_k}$ sono

$$\begin{aligned}a_{n_k} &= \cos\left(\frac{7\pi(6k+j)}{3} + \varepsilon_{n_k}\right) = \cos\left(14k\pi + \frac{7}{3}\pi j + \varepsilon_{n_k}\right) \\ &= \cos\left(\frac{7}{3}\pi j + \varepsilon_{n_k}\right) \to \cos\left(\frac{7}{3}\pi j\right).\end{aligned}$$

Al variare di $j = 0, \dots, 5$ abbiamo dunque ottenuto i seguenti limiti

$$\cos(0) = 1, \quad \cos(7\pi/3) = \cos(\pi/3) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(14\pi/3) = \cos(2\pi/3) = \frac{1}{2}, \quad \cos(21\pi/3) = \cos(\pi) = -1,$$

$$\cos(28\pi/3) = \cos(4\pi/3) = -\frac{1}{2}, \quad \cos(35\pi/3) = \cos(5\pi/3) = -\frac{1}{2}.$$

Abbiamo quindi trovato 4 diversi valori limite: $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1$. Sicuramente non ci sono altri valori limite diversi da questi, infatti presa una qualunque estratta $a_{n_k}$, la successione di indici $n_k$ deve avere infiniti indici in comune con almeno una delle sei estratte $n_k = 6k + j$ che abbiamo considerato. In conclusione l'insieme dei valori limite è: $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

(b) Si consideri la successione ***B****

$$a_n = \sin \frac{7\pi n(1+n^2)}{3n^2}.$$

Determinare i possibili limiti delle estratte convergenti (ovvero trovare l'insieme dei valori limite).

*Soluzione.* La soluzione è analoga all'esercizio precedente. L'insieme dei valori limite risulta essere $\{\sin(7\pi j/3) \colon j = 0, \dots, 5\} = \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

(c) Si consideri la successione ***C****

$$a_n = \cos \frac{7\pi n(1+3^n)}{3^{n+1}}.$$

Determinare i possibili limiti delle estratte convergenti (ovvero trovare l'insieme dei valori limite).

*Soluzione.* La soluzione è analoga a quella dell'esercizio 2(a); l'insieme dei punti limite è: $\{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

(d) Si consideri la successione ***D****

$$a_n = \sin \frac{7\pi n(1+3^n)}{3^{n+1}}.$$

Determinare i possibili limiti delle estratte convergenti (ovvero trovare l'insieme dei valori limite).

*Soluzione.* La soluzione è analoga a quella dell'esercizio 2(b); l'insieme dei punti limite è: $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\}$.

3. (a) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Si consideri la successione definita per ricorrenza: ****A***

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = \frac{(a_n-2)^2}{3}. \end{cases}$$

i. Determinare i valori di $\bar{x}$ per i quali la successione $a_n$ risulta essere costante.

ii. Determinare il limite della successione $a_n$ nel caso in cui $\bar{x} = 10$.

iii. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = 1$.

iv. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = -6$.

*Soluzione.* Siamo nel caso in cui $a_{n+1} = f(a_n)$ con

$$f(x) = \frac{(x-2)^2}{3}.$$

La successione $a_n$ è costante se e solo se si ha $f(\bar{x}) = \bar{x}$. L'equazione di secondo grado $f(x) = x$ ha due soluzioni

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Dunque la successione è costante solo nel caso in cui $\bar{x}$ sia uno di questi due valori.

In generale, se supponiamo che esista $\lim a_n = a$, passando al limite nell'equazione $a_{n+1} = f(a_n)$ si nota che gli unici valori per $a$ sono $a = +\infty$ oppure $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = a$ cioè $a = x_{1,2}$.

Notiamo che si ha

$$f(x) > x \iff x > x_2 \quad \text{o} \quad x < x_1.$$

inoltre $f$ è crescente sull'intervallo $I = (x_2, +\infty)$ e quindi $f(I) \subset I$. Nel caso $\bar{x} = 10 > x_2$ si ha $a_1 \in I$ e quindi la successione $a_n$ è sempre inclusa nell'intervallo $I$ ed è strettamente crescente. Di conseguenza $a_n$ ammette limite $a_n \to a$, ed essendo $a_n$ crescente dev'essere $a \geq a_1 = 10 > x_2$. Dunque necessariamente deve essere $a = +\infty$.

Passiamo ora al caso $\bar{x} = 1$. In questo caso cerchiamo un intervallo $I$ contenente il punto $\bar{x} = 1$, in cui $f$ risulti essere decrescente e tale che $f(I) \subset I$. Perché $f$ sia decrescente dev'essere $I \subset (-\infty, 2]$. Notiamo che $f(2) = 0$ e che $f(0) = \frac{4}{3} < 2$. Dunque l'intervallo $I = [0, 2]$ ha le proprietà richieste. Di conseguenza le estratte con indici pari $a_{2n}$ e quelle con indici dispari $a_{2n+1}$ verificano l'equazione

$$a_{2n+2} = f(f(a_{2n})), \qquad a_{2n+3} = f(f(a_{2n+1})).$$

Visto che $f(f(x))$ è crescente, entrambe queste estratte sono monotòne e dunque le due estratte convergono a due valori dell'intervallo $I$. Entrambi questi valori devono però soddisfare l'equazione $f(f(x)) = x$ che per esteso risulta essere una equazione di quarto grado:

$$x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 11x + 4 = 0.$$

Per risolvere questa equazione osserviamo che le soluzioni di $f(x) = x$ sono anche soluzioni di $f(f(x)) = x$ e dunque il polinomio di quarto grado deve essere divisibile per il polinomio $f(f(x)) - x$. Infatti si ha

$$\frac{x^4 - 8x^3 + 12x^2 - 11x + 4}{x^2 - 7x + 4} = x^2 - x + 1.$$

Dunque le soluzioni di $f(f(x)) = x$ sono le soluzioni di $f(x) = x$ (che abbiamo già determinato) più le soluzioni di $x^2 - x + 1 = 0$. Visto che quest'ultima equazione non ha soluzioni, possiamo concludere che l'equazione $f(f(x)) = x$ ha due soluzioni: $x_1$ e $x_2$. L'unica di queste due soluzioni che appartiene all'intervallo $I = [0, 2]$ è $x_1$ e quindi concludiamo che se $\bar{x} = 1$ si ha $a_n \to x_1 = (7 - \sqrt{33})/2$.
Consideriamo ora il caso $\bar{x} = -6$. Notiamo che $f((1 - \sqrt{33})/2) = x_2$ e che $\bar{x} = -6 < \frac{1-\sqrt{33}}{2}$. Dunque (ricordando che $f$ è decrescente per $x \leq 2$), si ha $a_2 = f(a_1) = f(\bar{x}) > x_2$. Ne consegue che da $a_2$ in poi la successione $a_n$ è maggiore di $x_2$ ed è strettamente crescente. Dunque, come per il caso $\bar{x} = 10$ si ottiene $a_n \to +\infty$.

(b) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Si consideri la successione definita per ricorrenza: ****B***

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = -\frac{(a_n+2)^2}{3}. \end{cases}$$

i. Determinare i valori di $\bar{x}$ per i quali la successione $a_n$ risulta essere costante.
ii. Determinare il limite della successione $a_n$ nel caso in cui $\bar{x} = -12$.
iii. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = -1$.
iv. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = 6$.

*Soluzione.* Si procede in maniera analoga al caso precedente. Le soluzioni costanti si hanno per

$$\bar{x} = \frac{-7 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

Per $\bar{x} = -12$ si ottiene una successione $a_n \to -\infty$. Nel caso $\bar{x} = 1$ si ha $a_n \to \frac{-7+\sqrt{33}}{2}$. Nel caso $\bar{x} = 6$ si ha $a_n \to -\infty$.

(c) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Si consideri la successione definita per ricorrenza: ****C***

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{3} - 2\right)^2. \end{cases}$$

i. Determinare i valori di $\bar{x}$ per i quali la successione $a_n$ risulta essere costante.
ii. Determinare il limite della successione $a_n$ nel caso in cui $\bar{x} = 22$.
iii. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = 3$.
iv. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = -18$.

*Soluzione.* La soluzione è analoga al caso (a). In questo caso le soluzioni costanti si hanno per

$$\bar{x} = \frac{21 \pm 3\sqrt{33}}{2}.$$

Sia nel caso $\bar{x} = 22$ che nel caso $\bar{x} = -18$ si ha $a_n \to +\infty$. Nel caso $\bar{x} = 3$ si trova $a_n \to \frac{21-3\sqrt{33}}{2}$.

(d) Sia $\bar{x} \in \mathbb{R}$ un parametro fissato. Si consideri la successione definita per ricorrenza: ****D***

$$\begin{cases} a_1 = \bar{x} \\ a_{n+1} = -\left(\frac{a_n}{2} + 2\right)^2. \end{cases}$$

i. Determinare i valori di $\bar{x}$ per i quali la successione $a_n$ risulta essere costante.

ii. Determinare il limite della successione $a_n$ nel caso in cui $\bar{x} = -21$.

iii. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = -2$.

iv. Determinare il limite nel caso in cui $\bar{x} = 12$.

*Soluzione.* La soluzione è analoga al caso (a). In questo caso le soluzioni costanti si hanno per

$$\bar{x} = \frac{-21 \pm 3\sqrt{33}}{2}.$$

Sia nel caso $\bar{x} = -21$ che nel caso $\bar{x} = 12$ si ha $a_n \to +\infty$. Nel caso $\bar{x} = -2$ si trova $a_n \to \frac{3\sqrt{33}-21}{2}$.

4. (a) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite di funzione *****A**

$$\lim_{x\to 0} \sin(2 + \log(x^2)).$$

*Soluzione.* Consideriamo la successione

$$x_n = \exp(\pi/4 - \pi n/2 - 1).$$

Se il limite in questione esistesse, visto che $x_n \to 0$, anche il limite della successione corrispondente

$$a_n = \sin(2 + \log(x_n^2))$$

dovrebbe esistere ma si nota che

$$a_n = \sin(\pi/2 - \pi n) = (-1)^n$$

e quindi $a_n$ non ammette limite. In conclusione il limite cercato non esiste.

(b) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite di funzione *****B**

$$\lim_{x\to 0} \cos(1 + \log(x^4)).$$

*Soluzione.* Si procede come nel caso precedente, ponendo

$$x_n = \exp(-\pi n/4 - 1/2).$$

Il limite non esiste.

(c) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite di funzione $\boxed{\texttt{*****C**}}$

$$\lim_{x\to 0} \sin(1 + \log(x^2)).$$

*Soluzione.* Si procede come nel caso precedente, ponendo

$$x_n = \exp(\pi/4 - \pi n/2 - 1/2).$$

Il limite non esiste.

(d) Calcolare, o dimostrare che non esiste, il limite di funzione $\boxed{\texttt{*****D**}}$

$$\lim_{x\to 0} \cos(2 + \log(x^4)).$$

*Soluzione.* Si procede come nel caso precedente, ponendo

$$x_n = \exp(-\pi n/4 - 1/2).$$

Il limite non esiste.